

Análisis de las estrategias argumentativas utilizadas por el alumnado de secundaria en la resolución de tareas de generalización de patrones lineales

Analysis of the argumentative strategies used by secondary school students in solving linear pattern generalization tasks

Oriol Pérez Rodríguez¹  

Genaro de Gamboa Rojas² 

Edelmira Rosa Badillo Jiménez³ 

¹Ph.D. Estudiante. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España. Correo electrónico: oriol.perez1395@gmail.com

²Ph.D. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España. Correo electrónico: genaro.degamboa@uab.cat

³Ph.D. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España. Correo electrónico: edelmira.badillo@uab.cat

Recibido: 09 de febrero de 2023

Aceptado: 26 de agosto de 2023

Publicado en línea: 29 de diciembre de 2023

Editor: Matilde Bolaño García 

Para citar este artículo: Pérez, O., de Gamboa, G. y Badillo, E. (2023). Análisis de las estrategias argumentativas utilizadas por el alumnado de secundaria en la resolución de tareas de generalización de patrones lineales. *Praxis*, 19 (3), 399-420.

RESUMEN

El trabajo tiene como objetivo comparar las justificaciones que genera el alumnado de secundaria de 14 y 15 años en tareas de generalización de patrones lineales, relacionándolas con la manera de formular los enunciados. En el estudio se analizaron las estrategias argumentativas utilizadas por los alumnos cuando la estructura del enunciado varía utilizando dos cuestionarios; para ello, se analizaron las justificaciones escritas a las tareas en los cuestionarios y se identificaron perfiles resolutores de todo el alumnado para cada tarea en base a las estrategias argumentativas utilizadas. A continuación, se comparan estos perfiles resolutores para cada alumno en los dos cuestionarios propuestos. Los resultados muestran que una parte del alumnado presenta diferencias significativas en las estrategias argumentativas que utilizan para resolver los dos cuestionarios. Se puede concluir que hay casos donde la estructura del enunciado es determinante para llegar a una respuesta correcta.

Palabras clave: estrategias argumentativas; procesos de razonamiento; tareas de generalización de patrones lineales.

ABSTRACT

The objective of the work is to compare the justifications generated by secondary school students aged 14 and 15 in tasks of generalization of linear patterns, relating them to the way of formulating the statements. In the study, the argumentative strategies used by the students are analyzed when the structure of the statement varies using two questionnaires, for this, the written justifications for the tasks in the questionnaires are analyzed and problem-solving profiles of all the students are identified for each task based on to the argumentative strategies used. Next, these solver profiles are compared for each student in the two proposed questionnaires. The results show that a part of the students present significant differences in their argumentative strategies that they use to solve the two questionnaires. It can be concluded that there are cases where the structure of the statement is decisive in reaching a correct answer.

Keywords: argumentative strategies; reasoning processes; tasks of the generalization of linear patterns.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo del razonamiento matemático del alumnado en la educación secundaria obligatoria ha sido un objeto de estudio para muchas investigaciones a lo largo del tiempo (Ball y Bass, 2003; Stylianides, 2008). Ahora mismo es un pilar fundamental en muchos currículums de educación matemática del mundo, donde aparece como dimensión de una forma muy explícita, como es el caso del de Catalunya (Decret 187/2015, DOGC). Además, en el marco de la evaluación internacional de la competencia matemática, y en particular en las pruebas PISA, se observa que, junto a la resolución de problemas, el razonamiento matemático es uno de los ejes que se considera y se utiliza para evaluar la competencia matemática del alumnado de 14 y 15 años.

Tanto en los documentos curriculares como en el marco teórico de las pruebas PISA se utiliza una noción de razonamiento matemático que se caracteriza por la participación del alumnado en actividades como: identificar, reconocer, organizar, conectar, representar, construir, evaluar, deducir, justificar. En esta misma línea, en nuestro estudio nos decantamos por una visión ampliada de Stylianides (2008), y consideraremos razonamiento matemático a cualquier acción que permita establecer relaciones entre las actividades y consiga elaborar conocimiento matemático, como sucede con el razonamiento por analogía.

Por otro lado, siguiendo la definición de Stylianides (2008), consideramos que la argumentación que se produce al resolver tareas matemáticas es una de las actividades en que se hace explícito el razonamiento matemático. Dado que la manera con la que las personas expresan su razonamiento es un fenómeno social en el cual se busca justificar una afirmación, no nos referimos a una demostración, sino a una forma de justificación más amplia, ya que algunos de los argumentos utilizados por quien resuelve las tareas no necesitan estar vinculados con la validez (Duval, 1999).

Las formas matemáticas de razonamiento que se han perfeccionado a lo largo de los siglos de actividad cognitiva están lejos de ser triviales para el alumnado (Radford, 2010); intentar ver de dónde

provienen estas dificultades y ayudar a organizar sus estrategias argumentativas infiriendo indirectamente en su razonamiento puede ser importante para resolverlas o minimizarlas.

El trabajo se centra en el razonamiento matemático que los alumnos movilizan al resolver tareas de generalización de patrones lineales, en la línea de otros estudios relevantes como son Kieran (1989) o Radford (2006). Diversos estudios (García-Cruz y Martínón, 1998; Callejo y Zapatera, 2014) señalan la existencia de dificultades por parte de los alumnos para proporcionar justificaciones rigurosas cuando se revuelven estas tareas, entre las que destacan: encontrar la relación entre los elementos de la secuencia, identificar el patrón de la secuencia y el paso de la generalización local a la generalización global (García-Cruz y Martínón, 1998).

Partiendo de esta problemática, nos interesa analizar la relación entre la formulación de los enunciados de tareas de generalización de patrones lineales y el razonamiento matemático movilizad por los alumnos de 14 y 15 años, al argumentar sus resoluciones a dichas tareas.

Nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo se relacionan las estrategias argumentativas utilizadas por los alumnos de 14 y 15 años al resolver tareas de generalización de patrones lineales con la estructura de los enunciados de las tareas?

La línea del estudio consistió en ver si hay algún cambio respecto a estas dificultades a partir de modificar los enunciados. Queremos estudiar la relación que hay entre la estructura de la pregunta y las estrategias argumentativas que el alumnado utiliza para resolverla.

Por tanto, nuestro primer objetivo de investigación es identificar estrategias argumentativas en la resolución escrita de tareas de generalización de patrones lineales, utilizando el modelo de Toulmin (1958), empleado más actualmente por Pedemonte y Balacheff (2016) en dos cuestionarios con diferente estructuración del enunciado. A partir de aquí, el segundo objetivo de investigación es identificar perfiles resolutores para las tareas de generalización propuestas con base en las estrategias argumentativas utilizadas. El tercer

objetivo de investigación es comparar para cada alumno su perfil resolutor al responder ambos cuestionarios. Finalmente, el último objetivo consiste en analizar la relación entre los cambios observados en el tercer objetivo y la interpretación que hacen los alumnos sobre el uso de apartados propuestos en el segundo cuestionario.

MARCO TEÓRICO

Razonamiento matemático

Actualmente, dentro del marco conceptual de la competencia matemática escolar (currículo español, catalán, actuales y anteriores), se puede observar que la definición de razonamiento matemático que se utiliza está inspirada en la que aportó el documento de las pruebas PISA 2021. Así, se define lo que se entiende por razonar matemáticamente a partir de las actividades que implica: evaluar situaciones, seleccionar estrategias, obtener conclusiones lógicas y desarrollar soluciones. Sin embargo, a lo largo de la historia han ido apareciendo muchas definiciones de razonamiento matemático (Duval, 1999; Stylianides, 2008;) que, aunque pueden parecer esencialmente diferentes, tienen una estrecha relación entre ellas y pueden ser útiles para entender el objetivo de razonar matemáticamente. De todas las definiciones se pueden extraer las ideas claves para intentar encontrar una definición precisa de lo que implica y qué importancia tiene el desarrollo de esta competencia en las personas. A continuación, presentamos el marco conceptual que utilizamos en la investigación en referencia al razonamiento matemático.

Modelo conceptual de razonamiento matemático

En el trabajo se utiliza la teoría de la cognición que proyecta un modelo conceptual de razonamiento matemático para las matemáticas escolares basado en dos aspectos centrales: el enfocado en el proceso y el enfocado en la forma (Jeannotte y Kieran, 2017). Son dos maneras diferentes de mirar un discurso determinado, aunque son dos aspectos muy relacionados entre ellos.

Los procesos del razonamiento matemático son etapas cognitivas dentro de los ciclos del razonamiento, que son fases iterativas en las que el alumnado intenta encontrar la justificación para resolver un problema concreto. Estos ciclos buscan relaciones entre objetos y se pueden clasificar en dos categorías que engloban unos cuantos procesos de razonamiento; y en una tercera que solamente encontramos uno.

- *Relacionados con la búsqueda de diferencias y similitudes*
 - Generalizar
 - Conjeturar
 - Identificar patrones
 - Comparar
 - Clasificar
- *Relacionados con la validación*
 - Justificar
 - Validar
 - Demostrar
 - Demostrar formalmente
- *Ejemplificación*

Aunque se traten por separado, todos los procesos de razonamiento matemático están interrelacionados, se estimulan, se influyen mutuamente y permiten el desarrollo de un discurso matemático cada vez más complejo a través de la generación de nuevas narraciones sobre objetos discursivos ya existentes (Jeannotte y Kieran, 2017).

El aspecto de la forma de razonamiento hace referencia a la manera en la que los procesos del discurso se combinan en un sistema ordenado que describe tanto los procesos como la relación entre ellos (Jeannotte y Kieran, 2017). Las formas más citadas son: inducción, deducción y abducción.

Según una propuesta ordenada de procesos que intervienen en el razonamiento matemático podemos observar su forma. A continuación, se ejemplifica una manera de ordenar los procesos cognitivos de razonamiento para obtener una forma inductiva o deductiva.

- *Inducción*
 1. Observar

2. Comparar
3. Identificar el patrón
4. Conjeturar
5. Generalizar

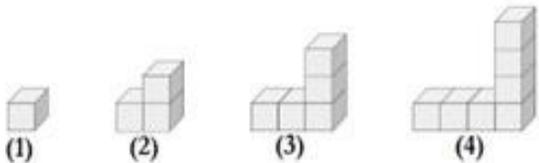
• *Deducción*

1. Generalizar
2. Justificar
3. Demostrar
4. Demostrar formalmente
5. Validar

Mostramos un ejemplo de estos tipos de razonamiento dentro de nuestras tareas de generalización de patrones lineales.

Problema: Observa la siguiente serie. Encuentra la cantidad de cubos que tiene el elemento número 50 de la siguiente serie. ¿Podrías encontrar el número de cubos de cualquier elemento de la serie? ¿Cómo? ¿Hay algún elemento de la serie con exactamente 235 cubos?

Figura 1. Esquema del enunciado de una tarea de generalización de patrones lineales.



Fuente: elaboración propia.

Posible resolución, forma y procesos:

Se observa la relación de la cantidad de cubos y el número de serie del elemento con esos cubos.

- (1) → 1
- (2) → 3
- (3) → 5
- (4) → 7

Se utiliza la observación y la ejemplificación para encontrar las primeras relaciones entre elementos que tenemos y su número de cubos. Comparamos los elementos entre ellos y observamos que cada uno tiene 2 cubos más que el anterior. Se utiliza la comparación para encontrar la relación entre el número de cubos de elementos consecutivos. Por tanto, el elemento número (5) tendrá 9 cubos y así sucesivamente. Podemos seguir este procedimiento para llegar a inducir que el (50) tendrá 99 cubos. Se

identifica el patrón que hay entre el número del elemento de la serie y el número de cubos que tiene, también se conjetura una hipótesis con el objetivo de conseguir la relación buscada.

Si queremos encontrar el número de cubos de cualquier elemento de la serie, podemos observar la relación entre el número del elemento y el número de cubos que tiene este elemento. Se generaliza utilizando la expresión algebraica.

- (1) → 1 + 0
- (2) → 2 + 1
- (3) → 3 + 2
- (4) → 4 + 3
- (...)
- (50) → 50 + 49
- (...)
- (n) → n + n - 1 = 2n - 1

Observamos que la relación entre un elemento de la serie y el número de cubos que tiene es el polinomio anterior. Podemos comprobar que la expresión algebraica funciona para todos los elementos anteriores. Se observa que el polinomio funciona para todos los elementos que teníamos calculados anteriormente.

Utilizando el polinomio anterior podemos comprobar que: $235 = 2n - 1 \rightarrow n = 118$. Se utiliza la generalización global para saber si hay algún elemento de la serie que tenga 235 cubos exactos.

Vemos que se utilizan los procesos descritos en el modelo conceptual para resolver el problema. También, observamos que la forma empieza siendo inductiva, ya que parte de la observación para acabar obteniendo una generalización global. Aun así, el razonamiento acaba con forma deductiva cuando se utiliza el polinomio para hallar un dato particular.

Estrategias argumentativas

La argumentación es la actividad en que se hace explícito el razonamiento matemático (Stylianides, 2008), es la manera con la que las personas expresan su razonamiento, en particular, el matemático. De forma amplia y al seguir la definición propuesta por Stylianides (2008), consideramos una argumentación como una secuencia conectada de aseveraciones. Así, una argumentación matemática se

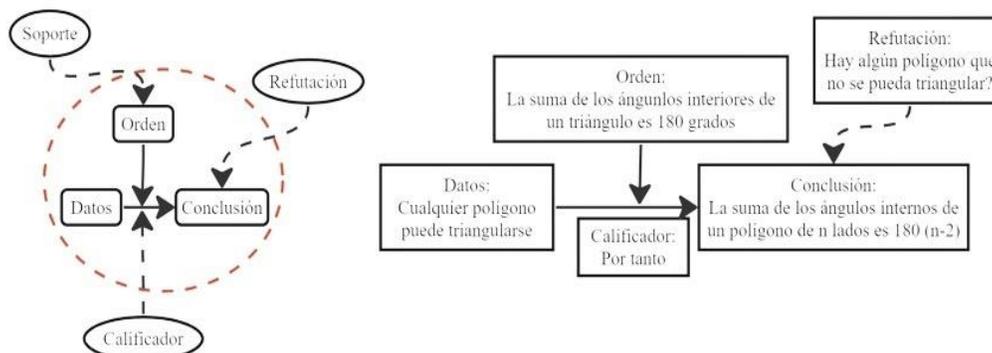
diferencia de una demostración en que la primera no necesita estar vinculada a la validez. Mientras la demostración busca la verdad, la argumentación busca la credibilidad, y, por tanto, puede depender más de la coherencia que de las leyes lógicas. La calidad de un argumento en la resolución de un problema está determinada por tres factores: primero, la validez, en la que se identifica como válido un argumento si la conclusión viene dada por sus premisas; segundo, la capacidad de convencer, que es la fuerza que tiene el argumento para que lo entiendan los demás; y finalmente, la constructibilidad, que es la coherencia en la que se desarrolla el argumento (Duval, 1999).

Pedemonte y Balacheff (2016), inspirados en Toulmin (1958), ofrecen un modelo de pasos de los argumentos utilizados en matemáticas. Este empieza con la idea de que un argumento es una

conclusión (afirmación) derivada de unos datos de acuerdo con un orden. El argumento puede tener un calificador que explica la fuerza del orden. La refutación son las excepciones a la conclusión, contraejemplos o particularidades donde no se cumple. También podemos hacer un seguimiento del soporte que sustenta el orden.

Los datos son los hechos que constituyen el punto de partida de la tarea. El orden da soporte a la conclusión, haciendo referencia a los datos, para registrar la legitimidad de la transición. El orden es una referencia específica de los datos, y su autoridad se puede apoyar en un soporte más general que hace referencia a convicciones globales. En la siguiente figura podemos observar un esquema del modelo de argumentación de Toulmin (1958) y un ejemplo a la derecha.

Figura 2. Esquema del modelo de argumentación de Toulmin (1958) y un ejemplo.



Fuente: elaboración propia.

Una estrategia se define como un procedimiento paso a paso para resolver un problema (Pedemonte y Reid, 2010). Para analizar las estrategias argumentativas utilizadas por los alumnos en la resolución de tareas de generalización de patrones lineales, nos centramos en el modelo de Toulmin (1958). Así, consideramos que una estrategia argumentativa está constituida por la secuencia ordenada de aserciones que permite formular unas conclusiones, utilizando un orden y partiendo de unos datos.

Generalización de patrones lineales

Se observa que hay muchas dificultades para proporcionar justificaciones rigurosas cuando se revuelven tareas de generalización de patrones lineales entre el alumnado de 14 y 15 años. Entre otras, las dificultades que más se destacan son: encontrar la relación entre los elementos de la secuencia, identificar el patrón de la secuencia y el paso de la generalización local a la generalización global (García-Cruz y Martínón, 1998; Callejo y Zapatera, 2014). Esto hace que en muchas ocasiones las estrategias argumentativas utilizadas por el alumnado de esta edad sean pobres, hecho que se puede vincular a que la forma del razonamiento vinculada a los procesos identificados en las

respuestas de un gran número de casos no es adecuada para resolver la tarea. Esto puede suceder debido a que los procesos que utilizan para resolver las tareas no les permiten una argumentación consistente, o porque la forma de su razonamiento no es la adecuada para avanzar en sus respuestas.

Los problemas de generalización de patrones lineales son tareas de sucesiones de figuras donde la regla que relaciona la posición de un término con el nombre de elementos que componen la figura es una función lineal $f(n) = a \cdot n + b$. Estas son las tareas que se utilizan en el estudio para analizar las estrategias argumentativas del alumnado en relación con la estructura del enunciado.

García-Cruz y Martínón (1998) identifican tres niveles de comprensión en la generalización cuando se intentan solucionar estos problemas. El avance en estos niveles de comprensión implica un salto cualitativo en la manera de pensar de los resolutores (Callejo y Zapatera, 2014).

- *Realizar una actividad procedimental.* En este nivel, el alumnado reconoce el carácter iterativo o recursivo del modelo lineal; los estudiantes hacen un recuento o añaden la diferencia constante; se identifican procesos de razonamiento como la observación o la ejemplificación. Aquí es interesante observar en las estrategias argumentativas cómo se utilizan los datos para llegar a la conclusión.
- *Realizar una generalización local.* En este nivel, el alumnado hace el uso de la regla para realizar un cálculo específico; se pueden identificar procesos de razonamiento como el de identificar un patrón o la comparación. En las estrategias argumentativas, se suele necesitar explicitar un orden para llegar a tener un soporte adecuado para justificar la conclusión.
- *Realizar una generalización global.* En este nivel, el alumnado transforma la regla utilizada en tareas anteriores para situaciones nuevas; se identifican procesos de razonamiento como la generalización y la validación. Suele ser necesario utilizar una estrategia argumentativa más elaborada respecto al orden para justificar el paso de los datos a la conclusión.

METODOLOGÍA

Este estudio pretende comprender e interpretar respuestas dadas por un grupo de estudiantes en una situación concreta que se plantea en unos cuestionarios de problemas de matemáticas. Es por eso que se trata, según Cohen *et al.* (2007), de un paradigma interpretativo donde no queremos perdernos ningún detalle en el análisis de las producciones del alumnado. Dentro de este paradigma, la metodología que se utilizó es la de una investigación de carácter cualitativo recomendada por diferentes autores (Baloco y López, 2002).

Participantes e instrumento

El estudio está enfocado en el alumnado de secundaria de segundo ciclo, en particular al alumnado de 14 y 15 años. Participan 20 alumnos de un colegio situado en Hospitalet de Llobregat, en Cataluña, España. Los instrumentos de recogida de datos son dos cuestionarios: el primero contiene una estructura de enunciado donde solo se pide la generalización local y global de la tarea (tabla 1); en cambio, en el segundo, también se piden las dos generalizaciones, pero hay más apartados que requieren otro tipo de respuesta (tabla 2). Es importante notar que estos apartados no están por orden de dificultad creciente, es decir que los apartados que requieren un razonamiento matemático más costoso, y por tanto una estrategia argumentativa más elaborada, no se encuentran al final. Además, en la segunda parte del segundo cuestionario se pregunta por el orden y la necesidad de los apartados anteriores para ver sus interpretaciones.

Los alumnos responden ambos cuestionarios en una misma sesión. En cuanto a la temporización de las tareas, se dan quince minutos para responder el primer cuestionario y cuarenta minutos para responder el segundo. Para asegurar que todo el alumnado tiene tiempo suficiente para realizar las actividades, se

guardarán quince minutos por si se alarga alguno de los dos cuestionarios, con el objetivo de que el factor tiempo no altere el resultado del estudio. Como aspecto importante en la resolución de los cuestionarios, se pide que no se borre nada de lo que se escribe.

Diseño de los cuestionarios

Con el objetivo de recoger datos que nos permitan analizar las estrategias argumentativas en las justificaciones escritas del alumnado, se han utilizado dos tablas (tabla 1 y tabla 2) en las que se relaciona cada pregunta de cada cuestionario con los objetivos

de la investigación, las dificultades explícitas identificadas en la literatura (García-Cruz y Martín, 1998), así como con los procesos de razonamiento matemático propuestos por (Jeannotte y Kieran, 2017). Hay que destacar que en la tabla 2 se hace referencia al segundo cuestionario, en el que se encuentra la interpretación del uso de los apartados, donde se observa cómo interpretan el uso de las preguntas y el orden en el que han respondido. Estos cuestionarios se validaron previamente en una sesión a modo de prueba piloto con estudiantes de la misma tipología y con la aprobación de expertos en el tema para comprobar su correcto funcionamiento.

Tabla 1. Modelo del cuestionario I.

Objetivos	Dificultades	Procesos	Preguntas
Analizar las estrategias argumentativas en las justificaciones de problemas de generalización de patrones lineales	Realizar una generalización local	Identificar el patrón	¿Cuál es el número de palillos que tiene el elemento número 100 de la serie? Justifica tu respuesta.
	Realizar una generalización global	Generalizar	¿Cómo le explicarías a un compañero/a cómo encontrar el número de palillos de cualquier elemento de la serie? Justifica tu respuesta.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 2. Modelo del cuestionario II.

Objetivos	Dificultades	Procesos	Preguntas
Primera parte del cuestionario II			
Analizar las estrategias argumentativas en las justificaciones de problemas de generalización de patrones lineales	Realizar una generalización global	Generalizar	Si le llamamos n a la posición que ocupa un elemento dentro de la serie, encuentra una relación entre la posición y el nombre de palillos que tiene. Justifica tu respuesta.
	Realizar una generalización global	Conjeturar	Explica con tus palabras qué relación crees que hay entre el número que indica la posición que ocupa un elemento dentro de la serie y el número de palillos que tiene este elemento. Comprueba que la relación encontrada funciona para los tres primeros elementos de la serie. Justifica tus respuestas.

	Realizar una generalización local	Identificar el patrón	¿Cuántos palillos tendrá el elemento número 70 de la serie? ¿Podrías explicar cómo lo has sabido?
	Realizar una generalización local	Identificar el patrón	¿Cuántos palillos tendrá el octavo elemento de la serie? Justifica tu respuesta.
	Realizar una actividad procedimental	Comparar	Si nos fijamos en los cuatro primeros elementos de la serie, ¿hay alguna relación entre dos elementos consecutivos? Si la respuesta es afirmativa, explica qué relación has encontrado.
	Realizar una actividad procedimental	Ejemplificar	Dibuja el cuarto elemento de la serie y justifica por qué lo has representado así. ¿Cuántos palillos tiene?
	Realizar una actividad procedimental	Observar	¿Cuántos palillos tienen los tres primeros elementos de la serie?
Segunda parte del Cuestionario II			
Interpretación del uso de los apartados	Ordenar los apartados		¿Cuál ha sido el orden que has seguido para contestar los apartados?
Interpretación del uso de los apartados	Necesidad de los apartados		¿Has utilizado algún apartado para responder otro?

Fuente: elaboración propia.

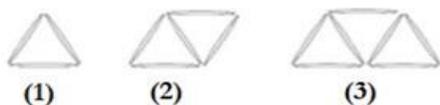
La tabla 1 muestra que en el primer cuestionario la estructura del enunciado está pensada para que se encuentre directamente el objetivo de la tarea de patrones lineales que es la generalización global, pasando por una local, proponiendo un total de dos preguntas. En cambio, en la tabla 2 se puede observar que la primera parte del segundo cuestionario es una tarea de generalización de patrones lineales donde las preguntas están

estructuradas de una manera diferente al primer cuestionario. Se proponen siete preguntas ordenadas en orden decreciente de sofisticación. Se busca que el alumnado llegue al objetivo final del problema intentando resolver otros apartados relacionados entre ellos.

A continuación, mostramos los dos cuestionarios realizados por el alumnado del estudio (figura 3).

Figura 3. Cuestionario I y cuestionario II.

Observa con atención los tres primeros elementos de una serie donde las figuras están formadas por palillos. Contesta las siguientes preguntas justificando con mucho cuidado todas las respuestas.



1. ¿Cuál es el número de palillos que tiene el elemento número 100 de la serie? Justifica tu respuesta.
2. ¿Cómo le explicarías a un compañero/a cómo encontrar el número de palillos de cualquier elemento de la serie? Justifica tu respuesta.

Observa con atención los tres primeros elementos de una serie donde las figuras están formadas por palillos. Contesta las siguientes preguntas justificando con mucho cuidado todas las respuestas. ¡Las preguntas no están ordenadas por orden de dificultad! En el caso de no saber alguna, es muy importante que intentes responder la siguiente.



1. Si le llamamos n a la posición que ocupa un elemento dentro de la serie. Encuentra una relación entre la posición y el nombre de palillos que tiene. Justifica tu respuesta.
2. Explica, con tus palabras, qué relación crees que hay entre el número que indica la posición que ocupa un elemento dentro de la serie y el número de palillos que tiene este elemento. Comprueba que la relación encontrada funciona para los tres primeros elementos de la serie. Justifica tus respuestas.
3. ¿Cuántos palillos tendrá el elemento número 70 de la serie? ¿Podrías explicar cómo lo has sabido?
4. ¿Cuántos palillos tendrá el octavo elemento de la serie? Justifica tu respuesta.
5. Si nos fijamos en los cuatro primeros elementos de la serie, ¿hay alguna relación entre dos elementos consecutivos? Si la respuesta es afirmativa, explica qué relación has encontrado.
6. Dibuja el cuarto elemento de la serie y justifica por qué lo has representado así. ¿Cuántos palillos tiene?
7. ¿Cuántos palillos tienen los tres primeros elementos de la serie?

Contesta las dos preguntas siguientes una vez hayas acabado de contestar todos los apartados, que hayas podido, del problema anterior:

1. ¿Cuál ha sido el orden que has seguido para contestar todos los apartados? (Indícalo en el siguiente esquema poniendo los números de los apartados)



2. ¿Has necesitado algún apartado para contestar otro? Si quieres, puedes hacer un pequeño esquema para indicarlo.

RESULTADOS

Con el propósito de comparar las estrategias argumentativas en dos cuestionarios sobre tareas de generalización de patrones lineales con estructura de enunciado diferente y analizar las interpretaciones del alumnado en la utilización de los apartados en el segundo cuestionario, dividimos el análisis en dos niveles inspirados en otros estudios (Caviedes *et al*, 2019). El primer nivel de análisis consiste en identificar las estrategias argumentativas utilizadas por el alumnado en los dos cuestionarios con la finalidad de generar unos perfiles iniciales, que son los dos primeros objetivos del estudio. En el primer nivel de análisis se hizo una codificación del alumnado en tres perfiles resolutores: principiante, avanzado y experto. El primer nivel de análisis acaba con la comparación de los perfiles resolutores para cada alumno en cada tarea. El segundo nivel de análisis consiste en el análisis detallado de las respuestas de los alumnos que hayan cambiado el perfil de un enunciado a otro. Además, en este segundo nivel se analiza la interpretación que hacen los alumnos de la utilidad de los diferentes enunciados propuestos para la resolución de la tarea.

Primer nivel de análisis

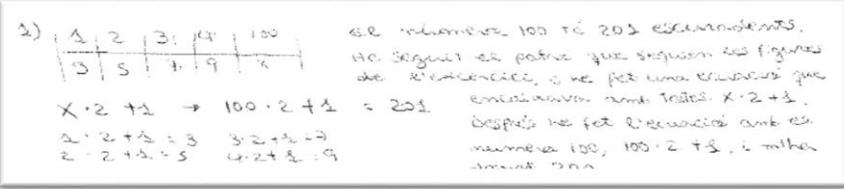
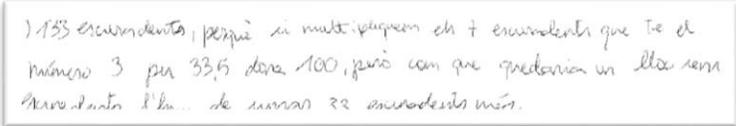
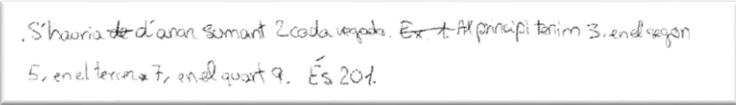
Para identificar las estrategias argumentativas de las respuestas se utiliza el modelo de Toulmin analizando el contenido escrito de las resoluciones de los dos cuestionarios. Se identificó cada respuesta fijándonos en: datos, orden y conclusión; juntamente con la relación que se establece entre estos tres factores:

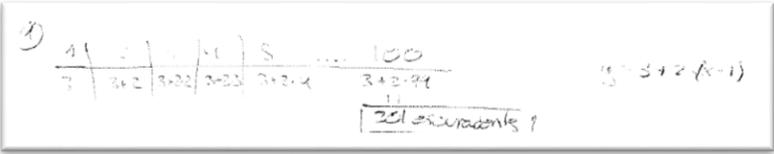
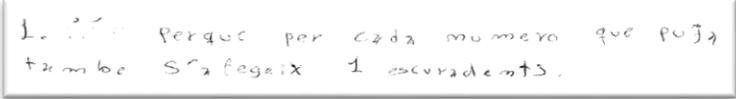
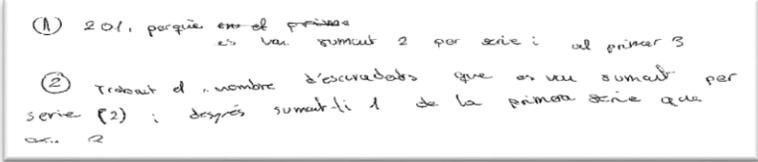
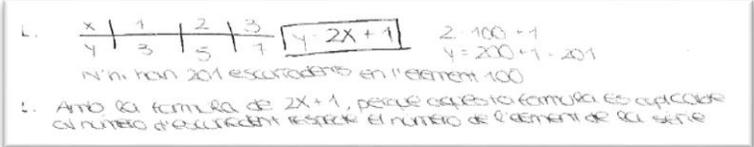
- *Datos*. Se observa si utilizan los datos explícitamente en la resolución. Se separan las respuestas en dos categorías.

- No explicita la utilización de los datos iniciales
- Explicita la utilización de los datos iniciales
- *Orden*. Se observa desde dos perspectivas diferentes si el orden utilizado se justifica, de dónde se ha extraído; y si la forma del razonamiento es inductiva o deductiva.
 - Perspectiva de la justificación del orden
 - No utiliza ningún orden
 - Utiliza un orden sin justificación explícita de dónde se ha extraído
 - Sustenta el orden justificando de dónde se ha extraído
 - Perspectiva de la forma del razonamiento:
 - No se adecua a razonamiento deductivo ni inductivo
 - Inductivo
 - Deductivo
- *Conclusión*. Se observa si las conclusiones son correctas o incorrectas. Para las correctas se analiza si se justifica la conclusión sustentada por un orden.
 - No contesta
 - No llega a la conclusión correcta
 - Llega a la conclusión correcta sin explicitar el orden utilizado
 - Llega a la conclusión correcta sustentada por un orden

A continuación, se muestra una tabla con ejemplos de respuestas dadas en los cuestionarios para concretar las diferencias de las categorías definidas previamente, las respuestas están traducidas del catalán, en los casos que sea necesario, en la parte inferior de la imagen.

Tabla 3. Ejemplos de repuestas del alumnado en referencia a las categorías definidas.

Identificación de respuestas	Respuesta del alumnado
<p><i>Datos.</i> No explicita la utilización de los datos iniciales</p>	 <p>Respuesta de A14: “Entre 200 y 300 palillos, ya que cada vez se añaden 2 palillos más.”</p>
<p><i>Datos.</i> Explicita la utilización de los datos iniciales</p>	 <p>Respuesta de A19 donde se observa una tabla utilizando los datos iniciales.</p>
<p><i>Orden.</i> No utiliza ningún orden</p>	 <p>Respuesta de A03: “102 palillos.”</p>
<p><i>Orden.</i> Utiliza un orden sin justificación explícita de dónde se ha extraído</p>	 <p>Respuesta de A05: “133 palillos, porque se multiplican los 7 palillos que tiene el número 3 por 33.5, da 100, pero le tenemos que sumar 33, porque quedaría un sitio sin.”</p>
<p><i>Orden.</i> Sustenta el orden justificando de dónde se ha extraído</p>	 <p>Respuesta de A13: “Se tendría que sumar 2 cada vez. Al principio tenemos 3, en el segundo 5, en el tercero 7, en el cuarto 9. Es 201.”</p>
<p><i>Orden.</i> Inductivo</p>	 <p>Respuesta de A15 donde se observa un razonamiento inductivo.</p>

Orden. Deductivo	 <p>Respuesta de A20 donde se observa un razonamiento deductivo.</p>
Conclusión. No llega a la conclusión correcta	 <p>Respuesta de A16: "33 porque cada número que sube también se añade 1 palillo."</p>
Conclusión. Llega a la conclusión correcta sin explicitar el orden utilizado	 <p>Respuesta de A17: "Encontrar el número de palillos que se van sumando por serie (2) y después añadiéndole 1 de la primera serie que son 3."</p>
Conclusión. Llega a la conclusión correcta sustentada por un orden	 <p>Respuesta de A18: "Con la fórmula de $2x + 1$, porque esta fórmula es aplicable al número de palillos con respecto al número de elemento de la serie."</p>

Fuente: elaboración propia.

Una vez obtenida la identificación de las estrategias argumentativas en la primera tipología de enunciado (cuestionario I), habiendo usado el criterio anterior, tenemos que generar un perfil resolutor inicial para cada alumno. Para definir estos perfiles se analizaron con más profundidad las conclusiones de todos los casos usando el siguiente criterio que consiste en agrupar las tres categorías anteriores donde nos ayuda la identificación anterior.

- *Perfil nivel experto.* Llega a la conclusión correcta partiendo de los datos de acuerdo con el orden utilizado.
- *Perfil nivel avanzado.* Llega a la conclusión correcta sin partir de los datos i/o sin orden específico.
- *Perfil nivel principiante.* Llega a una conclusión incorrecta.

Cuando tuvimos identificado todo el alumnado en un perfil inicial, se hizo exactamente el mismo procedimiento para la segunda tipología de enunciado con estructura diferente (cuestionario II), así obtuvimos una clasificación de todo el alumnado en un segundo perfil. Una vez identificados el primer perfil y el segundo perfil para todo el alumnado, se pudieron comparar las estrategias argumentativas utilizadas en tareas de generalización de patrones lineales con diferente estructuración en los enunciados, que es el objetivo del estudio. Por último, en el caso de que haya habido modificaciones en el perfil, se estudiaron particularmente qué cambios aparecieron en las estrategias argumentativas, utilizando el mismo marco de Toulmin (1958).

Segundo nivel de análisis

Una vez finalizado el primer nivel de análisis, la segunda parte consistió en estudiar más a fondo las respuestas de los casos que hayan cambiado el perfil de un enunciado a otro. Esto tiene como finalidad explicar las interpretaciones que tiene el alumnado sobre el uso de los apartados.

Para este análisis, se utilizaron las preguntas de la segunda parte del cuestionario II, y se hizo una clasificación del alumnado utilizando los siguientes dos criterios:

- *No interpreta la necesidad de utilizar apartados para responder otros*
 - No cambia de perfil
 - Cambia de perfil
- *Interpreta la necesidad de utilizar apartados para responder otros*
 - No cambia de perfil
 - Cambia de perfil

Se analiza más en concreto el alumnado que interpreta que necesita utilizar apartados para resolver otros, aunque no cambien de perfil. Se identifica qué progresión utiliza para realizar los apartados juntamente con la necesidad de utilizarlos para responder a otros.

Tabla 4. Identificación de estrategias argumentativas del cuestionario I.

Datos	No explicita la utilización de los datos iniciales	A01, A02, A03, A04, A05, A06, A08, A10, A11, A16, A17
	Explicita la utilización de los datos iniciales de alguna forma	A07, A09, A12, A13, A14, A15, A18, A19, A20
Orden	Justificación del orden	No utiliza ningún orden: A01, A02, A03, A04.
		Utiliza un orden sin justificación explícita de dónde se ha extraído: A05, A06, A08, A10, A16, A17
		Sustenta el orden justificando de dónde se ha extraído:

DISCUSIÓN

Identificación de las estrategias argumentativas en el cuestionario I

El análisis de las respuestas escritas de los alumnos al cuestionario I permitió identificar la estrategia argumentativa utilizada por cada alumno a partir del uso explícito que hacían desde la secuencia de elementos (datos, orden y conclusión) del modelo de Toulmin (1958). Los resultados muestran que 9 de las respuestas del alumnado usa de manera explícita los datos para intentar resolver la tarea, en cambio 11 no los menciona de ninguna forma. Respecto al orden, 10 hacen alguna referencia para justificar la fuerza del orden, en cambio los otros 10 no. Hay 8 alumnos que no se identifica con ninguna forma de razonamiento, los que se identifican son 9 inductivos y 3 deductivos. Respecto a las conclusiones, se observa que solo hay 6 que han resuelto correctamente la tarea, aun así, 3 no expresan de manera explícita de dónde han salido sus conclusiones. Los otros 14 no llegan a la conclusión correcta.

La tabla 4 muestra la clasificación de cada alumno respecto a cada uno de los tres elementos de la estructura de Toulmin (1958).

		A07, A09, A11, A12, A13, A14, A15, A18, A19, A20
	Perspectiva de la forma del razonamiento	No se adecua a razonamiento deductivo ni inductivo: A01, A02, A03, A04, A05, A06, A08, A16
		Inductivo: A07, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A17
		Deductivo: A18, A19, A20
Conclusión	No contesta	A04
	No llega a la conclusión correcta	A01, A02, A03, A05, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A14, A15, A16
	Llega a la conclusión correcta sin explicitar el orden utilizado	A12, A13, A17
	Llega a la conclusión correcta sustentada por un orden	A18, A19, A20

Fuente: elaboración propia.

Como hemos indicado en la anterior sección, para definir los perfiles iniciales se analizan más en profundidad las conclusiones de todos los casos, usando un criterio que consiste en agrupar los tres elementos de Toulmin ayudados por la identificación de la tabla 4.

Los resultados muestran que 3 respuestas por parte del alumnado se identifican con perfil experto y otras 3 con perfil avanzado, el resto (14) corresponden a un perfil de resolución principiante. Estos resultados se muestran a continuación.

- *Experto*: A18, A19, A20
- *Avanzado*: A12, A13, A17
- *Principiante*: A01, A02, A03, A04, A05, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A14, A15, A16

Identificación de las estrategias argumentativas en el cuestionario II

El análisis de las respuestas escritas de los alumnos al cuestionario II permitió a su vez identificar la

estrategia argumentativa utilizada por cada alumno con base en los tres elementos básicos de la estructura de Toulmin (1958) (datos, orden y conclusión).

Los resultados muestran que 16 respuestas hacen referencia a los datos de una manera explícita, en cambio 4 no van en esta línea. En el caso del orden, los resultados muestran que hay 15 respuestas donde el orden utilizado coge fuerza a partir de una referencia explícita, en cambio 5 no corresponden a esta definición. Hay 16 respuestas que se identifican con razonamiento inductivo o deductivo, y 6 no se identifican con ninguna forma de razonamiento. Respecto a las conclusiones, se puede observar que en 10 respuestas se logra llegar a la correcta, aun así, solo en 7 casos se llega de acuerdo con un orden. Las otras 10 conclusiones corresponden a respuestas incorrectas.

La tabla 5 muestra la clasificación de cada alumno respecto a cada uno de los tres elementos de la estructura de Toulmin (1958).

Tabla 5. Identificación de estrategias argumentativas del cuestionario II.

Datos	No explicita la utilización de los datos iniciales	A01, A02, A10, A16
	Explicita la utilización de los datos iniciales de alguna forma	A03, A04, A05, A06, A07, A08, A09, A11, A12, A13, A14, A15, A17, A18, A19, A20
Orden	Justificación del orden	No utiliza ningún orden: A01, A02
		Utiliza un orden sin justificación explícita de dónde se ha extraído: A06, A08, A16
		Sustenta el orden justificando de dónde se ha extraído: A03, A04, A05, A07, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A17, A18, A19, A20
	Perspectiva de la forma del razonamiento	No se adecúa a razonamiento deductivo ni inductivo: A01, A02, A08, A16
		Inductivo: A06, A07, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A17
		Deductivo A03, A04, A05, A18, A19, A20
Conclusión	No contesta	-
	No llega a la conclusión correcta	A01, A02, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A14, A16
	Llega a la conclusión correcta sin explicitar el orden utilizado	A12, A13, A17
	Llega a la conclusión correcta sustentada por un orden	A03, A04, A05, A15, A18, A19, A20

Fuente: elaboración propia.

Para definir los segundos perfiles correspondientes al cuestionario II, se utiliza el mismo criterio que con los perfiles iniciales correspondientes al cuestionario I; en este caso, nos ayudamos por la identificación de la tabla 5.

En este cuestionario los resultados muestran que 7 respuestas por parte del alumnado de identifican con perfil experto y otras 3 con perfil avanzado, las 10 resoluciones restantes corresponden a un perfil principiante. Estos resultados se muestran a continuación:

- **Experto:** A03, A04, A05, A15 A18, A19, A20
- **Avanzado:** A12, A13, A17
- **Principiante:** A01, A02, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A14, A16

que mantuvieron su perfil y nos centraremos después en los alumnos que sí cambiaron de perfil.

- **No hay cambio de perfil.** Hay 16 casos dónde no se modifican los perfiles. Por tanto, no hay un cambio hacia un perfil inferior en ningún caso.

- **Experto:** A18, A19, A20
- **Avanzado:** A12, A13, A17
- **Principiante:** A01, A02, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A14, A16

Comparación de perfiles

Los resultados anteriores muestran que la mayoría de los alumnos mantuvieron su perfil en ambas tareas. Sin embargo, algunos alumnos sí mostraron cambios en sus estrategias de argumentación, pasando de un nivel principiante a un nivel experto. A continuación, mostramos ejemplos de alumnos

A continuación, se presentan tres ejemplos (A18, A12, A02) de alumnos que mantienen sus correspondientes perfiles.

Figura 4. Argumentaciones de alumnado que no varía el perfil.

The figure shows three handwritten mathematical arguments. Each argument includes a sequence of numbers (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) and a formula $2x+1$ or $3n+1$. The arguments are:

- Perfil experto:** The student uses the formula $2x+1$ to find the 100th term of the sequence. The calculation is $2 \cdot 100 + 1 = 201$. The student explains that the formula is applicable to the number of sticks relative to the position in the sequence.
- Perfil avanzado:** The student explains that for the 201st term, they sum the first 3 terms (1, 2, 3) and then add 2 for each subsequent term. The calculation is $1 + 2 + 3 + 195 \cdot 2 = 201$. The student identifies the number of sticks as 201.
- Perfil principiante:** The student calculates the sum of the first 10 terms of the sequence: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$. They then calculate the sum of the next 10 terms: $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 145$. The total sum is $55 + 145 = 200$. They conclude that the 200th term is 200.

Fuente: elaboración propia.

Praxis

Es importante señalar que existen perfiles de alumnado que no varían en el segundo cuestionario, debido a que no mejoran en sus estrategias argumentativas de acuerdo con los criterios del estudio para que aparezca un cambio de perfil, que sin embargo muestran un cambio particular hacia mejor en cuanto los datos o el orden que permite

unas justificaciones más completas en el cuestionario II. Si comparamos los resultados anteriores, identificamos que 4 alumnos (A06, A08, A11 y A17) pasan de no explicitar la utilización de los datos a sí explicitarla en el cuestionario II. Si nos fijamos en el orden, observamos que 2 alumnos (A10 y A17) en el primer cuestionario no justifican de dónde proviene el orden utilizado, en cambio en el segundo cuestionario sí lo hacen; y que 1 alumno

(A06) pasa de que su razonamiento no se identifique con ninguna forma de razonamiento a mostrar evidencias de razonamiento inductivo.

• **Cambio de perfil.** Hay 4 casos (A03, A04, A05 y A15.) donde se modifican los perfiles de principiante a experto. En las figuras que se muestran a continuación se observa cómo el alumnado tenía perfil principiante en el primer cuestionario, en cambio en el segundo cuestionario pasan a perfil experto. En cada caso, modifican los perfiles por algún motivo detallado a continuación:

✚ **Cambio de orden en la estrategia argumentativa.** En el primer cuestionario se observa que se utiliza un orden incorrecto, no se encuentra el patrón de la serie para llegar a la generalización. En cambio, se observa que en el segundo cuestionario el alumno encuentra el patrón para llegar a la conclusión correcta.

✚ **Inclusión de orden en la estrategia argumentativa.** En el primer cuestionario observamos que no se utiliza ningún orden para intentar llegar a la respuesta correcta. En cambio, en el cuestionario II se observa que los alumnos utilizan un orden adecuado para llegar a la conclusión correcta.

✚ **Bloqueo en el primer cuestionario.** En el primer cuestionario observamos que hay un bloqueo en el alumno. En cambio, en el cuestionario II se observa que se utiliza un orden adecuado para llegar a la conclusión correcta.

A continuación, se muestran los ejemplos correspondientes al alumnado que ha cambiado de perfil.

Figura 5. Ejemplos de cada caso de alumnos que pasan a perfil experto en el cuestionario II.

1) 133 escuadras, porque si multiplicamos el 3 escuadras por 44 el número 3 por 33,5 da 100, pero con que quedarán un escuadrón de escuadras. Pero si sumas 33 escuadras más.

2) Multiplicas el 7 por el número que quieras de la serie y el número de veces que quieras el resultado, el resultado con el resultado de escuadras que te da.

3) Multiplicas 3 por la posición que te da de series y escuadras el dato de número de escuadras que te da.

4) Que quieras el número que quieras de la serie. Puedes una cantidad de un otro, dependiente del momento de la posición que el punto de derivadas.

5) Multiplicas el número 3 por el escuadrón, porque de utilizarlo. Respuestas que ha memorizado anteriormente $3x+1$.

"1. 133 palillos, porque si multiplicamos los palillos que tiene el número 3 por 33,5 da 100, pero como quedaría un sitio sin palillo se tiene que sumar 33 más

2. Multiplicas el 7 por el número que quieras de la serie y el mismo número es el resultado"

Cambio de orden

"Si multiplicas 3 por la posición que tiene y le sumas 1 palillo te da el número de palillos

3. 211 palillos porque he utilizado la fórmula $3x+1$ "

Bloqueo el primero

"La posición que ocupa multiplicada por 3 y sumando 1 da los palillos (n)"

Inclusión de orden

1. 300 escuadras. 1. 100 escuadras

2.

1. La posición que ocupa el palillo por 3 sumo 1 da de escuadras totales (n)

2. $3 \cdot n + 1 = X$

3. $3 \cdot 70 + 1 = 211$. Así es porque de la serie

1° 2° 3° 4° 5° 6° 7° 8°

100 = 100 escuadras

211 escuadras, lo es porque

Para un número más de 2 hay 2 otros solo que uno con 3, el otro con 4. Pasa eso con todos los números. Entonces de 2 entonces 6 4 los suma con solo 3 palillos, el 20 que en realidad usas el último es 4 lo suma con 4 para entonces $64 \times 3 + 20 + 4 = 211$.

Fuente: elaboración propia.

Interpretación del uso de los apartados

En este apartado se observan las respuestas de todo el alumnado a la segunda parte del cuestionario II, relacionada con su interpretación sobre la necesidad de utilizar algún apartado para responder otros y posteriormente relacionarlo con el posible cambio de perfil durante el proceso. Se comentan todos los casos y sobre todo los considerados más interesantes, es decir, donde han manifestado la necesidad de utilizar algún apartado para responder otros y han cambiado el perfil.

- *No interpreta la necesidad de utilizar algún apartado para responder otros.* En este apartado se encuentra la mitad del alumnado, hay 8 casos que no modifican sus perfiles, tal y como se muestra a continuación:
 - *Experto:* A19
 - *Avanzado:* A17
 - *Principiante:* A07, A09, A10, A12, A14, A16

En cambio, hay 2 alumnos (A03 y A05) que modifican sus estrategias argumentativas en el segundo cuestionario y cambian de perfil, pero no interpretaron que necesitaron algún apartado para responder otros. En los 2 casos pasaron de perfil principiante a experto.

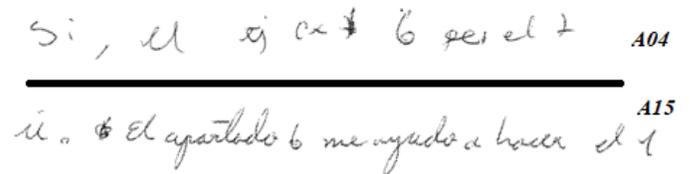
- *Interpreta la necesidad de utilizar algún apartado para responder otros.* En este apartado se encuentra la otra mitad del alumnado, hay 8 casos que no modifican sus perfiles, tal y como se muestra a continuación:
 - *Experto (A18 y A20.).* En los 2 casos expresan la necesidad de utilizar los dos primeros apartados para contestar los

otros, en la siguiente figura se muestra un ejemplo.

- *Avanzado (A13).* Expresa que necesita los apartados 3, 4, 6, 7 para contestar el primero y el segundo.
- *Principiante (A01, A02, A06, A08 y A11.).* No se observa ningún patrón en esta tipología de alumnado, cada persona contesta de manera distinta. 3 casos (A01, A02 y A11) comentan que necesitan los primeros apartados para contestar los siguientes, y en los otros 2 casos (A06 y A08) responden que necesitan los apartados del final para responder los primeros.

Hay 2 alumnos (A04 y A15) que han interpretado necesitar algún apartado para responder algún otro y las estrategias argumentativas del segundo cuestionario tenían cambios significativos respecto al primero. Sus perfiles se modificaron de principiante a experto en los dos casos. Ambos expresan que necesitan el apartado 6 para responder el 1. En la figura 6 se observan las respuestas.

Figura 6. Perfiles de principiante en el cuestionario I y perfiles experto en el cuestionario II.



Fuente: elaboración propia.

El resumen de los resultados explicados previamente se muestra en la tabla 6.

Tabla 6. Relación entre la modificación de estrategias argumentativas con la interpretación de utilizar apartados en el cuestionario II.

No cambian las estrategias argumentativas		Sí cambian las estrategias argumentativas	
Interpreta la necesidad de utilizar algún apartado para responder otros	No interpreta la necesidad de utilizar algún apartado para responder otros	Interpreta la necesidad de utilizar algún apartado para responder otros	No interpreta la necesidad de utilizar algún apartado para responder otros

A01, A02, A06, A08, A11, A13, A18, A20	A07, A09, A10, A12, A14, A16, A17, A19	A04, A15	A03, A05
--	--	----------	----------

Fuente: elaboración propia.

CONCLUSIÓN

En primer lugar, la aplicación del modelo de Toulmin (1958), utilizado más actualmente por Pedemonte y Balacheff (2016), en el análisis de las producciones del alumnado, en los dos cuestionarios ha permitido hacer una identificación de las estrategias argumentativas y, por tanto, nos ha permitido cumplir con el primer objetivo del trabajo. Se observa que la tipología de enunciados del segundo cuestionario genera más justificaciones haciendo referencia explícita a los datos y sustentadas por un orden. Respecto a la corrección de las conclusiones, también se identifica una subida en el segundo cuestionario. Con estas observaciones podemos decir que la segunda estructura de enunciados hace que las estrategias argumentativas que moviliza el alumnado para resolver estas tareas sean más completas y mejor justificadas en referencia al marco teórico utilizado de Toulmin (1958).

En segundo lugar, utilizando el criterio basado en agrupar las tres categorías del modelo de Toulmin (datos, orden y conclusión), pero centrado en las conclusiones, se han identificado los perfiles correspondientes a cada alumno en el primer cuestionario y en el segundo cuestionario, lo que nos ha permitido alcanzar el segundo objetivo que tenía el estudio. Una vez identificados los perfiles en los dos cuestionarios, se precedió a compararlos para lograr el tercer objetivo del trabajo. Se observa que el 80% del alumnado no cambia de perfil, aunque en la identificación anterior puede que modifique alguna parte de su estrategia (datos, orden, conclusión); por el contrario, un 20 % de todo el alumnado pasa de un perfil principiante a un perfil experto cuando se le cambia la estructuración del enunciado. Se observa que en estos casos el cambio de perfil se produce por varios motivos, todos referidos al orden de la estrategia:

- *Cambio de orden en la estrategia argumentativa.* En el primer cuestionario se observa que se da fuerza a la conclusión con un patrón incorrecto en los elementos de la

serie, y por tanto la respuesta está equivocada; en cambio, en el segundo cuestionario se encuentra el patrón correcto que permite llegar a la conclusión acertada.

- *Inclusión de un orden en la estrategia argumentativa.* En el primer cuestionario se dan conclusiones sin apoyarse en ningún orden en concreto; en cambio, en el segundo cuestionario se observa cómo aparece un orden que permite resolver la tarea de una forma correcta.
- *Paso de bloqueo a introducción de un orden.* En el primer cuestionario no se responde, en cambio, en el segundo cuestionario se observa cómo aparece un orden que permite resolver la tarea de una forma correcta.

Es importante señalar que, aunque el impacto de la estructura del segundo cuestionario es limitado (solo el 20 % cambia de perfil), se observa que la inclusión de más preguntas que incluyan los procesos de razonamiento puede ayudar a los alumnos a comprender mejor el problema (un 25 % muestra una mayor elaboración en las respuestas del cuestionario II respecto a las del cuestionario I), y que en ningún caso las estrategias argumentativas movilizadas son de carácter menos justificadas en el segundo cuestionario, ya que no hay cambio de perfil a la baja. Por tanto, los apartados que hay en el segundo cuestionario benefician a una parte del alumnado en cuanto a sus justificaciones del problema y no afecta a la otra parte. Por último, hay que señalar que, a 5 alumnos, aunque no cambie su perfil, la estructura del cuestionario II les permite mejorar sus estrategias argumentativas miradas desde el modelo de Toulmin (1958), ya sea respecto a los datos o el orden.

El último objetivo consistía en analizar la relación que hay en el cambio de perfil con la interpretación

que tiene el alumnado de la necesidad de utilizar apartados para resolver otros. Se observa que la mitad del alumnado interpreta que necesita algún apartado para responder a otro; aun así, solo 2 de los 4 alumnos que han cambiado de perfil comentan que para justificar la generalización global del problema han necesitado otro apartado de naturaleza más fácil para responderla. Los otros 2 alumnos no comentan que sea necesario ningún apartado para responder otro.

Respecto a la pregunta de investigación planteada al inicio del estudio, se observa que la segunda tipología del enunciado beneficia a una parte importante del alumnado (9 de 20), y por tanto se establece una relación entre la estructura del enunciado y las estrategias argumentativas utilizadas para resolver las tareas de generalización de patrones lineales. Sin embargo, conviene profundizar en por qué algunos alumnos no presentan ninguna mejoría en el nivel de elaboración de sus estrategias argumentativas.

Finalmente, hay que comentar que parece interesante profundizar cómo afecta en las justificaciones del alumnado la estructura de la pregunta de los problemas. Sería enriquecedor hacer el mismo estudio con otra tipología de tareas o incluso pensar otra manera de estructurar los enunciados y repetir el estudio con los mismos problemas. También se podría ahondar en los motivos del cambio de perfil introduciendo entrevistas clínicas a todo el alumnado que manifieste la necesidad de utilizar algunos apartados para poder responder a otros. Para acabar, hay que señalar que ampliar la muestra a otros centros y otras edades puede dar información sobre qué preguntas son más necesarias en cada grupo de edad para una mejor comprensión del problema y mejor resolución.

DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERESES

Los autores manifestamos que durante la ejecución del trabajo y la redacción del artículo no han incidido intereses personales ajenos a nuestra voluntad, incluyendo malas conductas y valores distintos a los que usual y éticamente tiene la investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D. L. y Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, and D. Schifter (Ed). A research companion to principles and standards for school mathematics, (pp. 27-44). National Council of Teachers of Mathematics.

Baloco, C. y López, O. (2002). Ambientes virtuales con metodología de aprendizaje basado en problemas (ABP): Una estrategia didáctica para el fortalecimiento de competencias matemáticas de las herramientas multimedia interactivas para la enseñanza en educación preescolar. *Praxis*, 18(2), 324-344.

<http://dx.doi.org/10.21676/23897856.3919>

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: An essay on the case of proof. *ZDM*, 40(3), 501-512.

<https://doi.org/10.1007/s11858-008-0103-2>

Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problema de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria.

Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28(48), 64-88.

<https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a044>

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019). Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. *Praxis*, 15(1), 69-87.

<http://dx.doi.org/10.21676/23897856.2984>

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge, Oxon.

Decret 187/2015 de 2015. (2015, 25 de agosto), España. Ordenació dels ensenyaments de l'educació secundaria obligatòria, DOGC No 6945 – 28.8.2015.

<https://portaljuridic.gencat.cat/eli/es-ct/d/2015/08/25/187>

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1-16.

<https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, 7(3), 229-240. <http://hdl.handle.net/11162/169309>

Pedemonte, B., & Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ckç-enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 104-122.

<https://doi.org/10.1007/s10649-010-9275-0>

Radford, L., & Peirce, C. S. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., & Méndez, A. (Ed.), *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.

<https://doi.org/10.1080/147948009035697411>

<https://www.raco.cat/index.php/REIRE/article/download/131531/181353>

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning and proving. *For the learning of mathematics*, 28(1), 9-16.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument*. Cambridge University Press.