

Tipos de actividad cognitiva y grado de pensamiento espacial en estudiantes de grado noveno al representar poliedros

Types of cognitive activity and degree of spatial thinking in ninth year students when representing polyhedra

Yudy Yasmín Sánchez-Barrera¹  
Laura Givelly Peña-Garzón² 

¹ Magíster en Educación Matemática. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia. Correo electrónico: yudy.sanchez@uptc.edu.co

² Magíster en Educación Matemática. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia. Correo electrónico: lauragivelly.pena@uptc.edu.co

Recibido: 07 de diciembre de 2020

Aceptado: 22 de marzo de 2023

Publicado en línea: 13 de abril de 2023

Editor: Matilde Bolaño García 

Para citar este artículo: Sánchez-Barrera, Y. Y. y Peña-Garzón, L. G. (2023). Tipos de actividad cognitiva y grado de pensamiento espacial en estudiantes de grado noveno al representar poliedros. *Praxis*, 19(1). 69-86

RESUMEN

El pensamiento espacial es uno de los ejes centrales del estudio de la geometría, la cual ocupa un lugar importante en los planes de estudio en los diferentes niveles educativos. En este trabajo se determinaron los tipos de actividad cognitiva y el grado de pensamiento espacial de un grupo de estudiantes de grado noveno al experimentar con representaciones semióticas de poliedros. Adicionalmente, se contrastaron las definiciones de prisma y pirámide en dos grupos de estudiantes, analizando los libros y sitios web de mayor consulta por ellos. Se utilizó un enfoque de investigación mixto, con un diseño preexperimental apoyado en un análisis descriptivo y correlacional, sustentado en la teoría de las representaciones semióticas de Duval. Se determinaron dificultades en el uso del lenguaje verbal al describir poliedros y un bajo nivel de pensamiento espacial para transformar una figura 3D. Se evidenció que no hay diferencia significativa en las concepciones deficientes dadas por los dos grupos de estudiantes. Se atribuyó parte de las dificultades a los errores y la forma de presentar la temática de poliedros en libros y sitios web, y se plantea la necesidad de diseñar ambientes en los que no se priorice la comprensión de poliedros a través de la definición.

Palabras clave: pensamiento espacial; actividad cognitiva; prismas; pirámides; representaciones semióticas.

ABSTRACT

Spatial thinking is one of the central axes of the study of geometry, which occupies an important position in the curriculum at different educational levels. In this paper we determine the types of cognitive activity and the level of spatial thinking of a group of ninth year students in their experience with semiotic representations of polyhedra. Additionally, the definitions of prism and pyramid were contrasted in two groups of students, analysing the books and websites most consulted by them. A mixed research approach was used, with a pre-experimental design supported by a descriptive and correlational analysis, based on Duval's theory of semiotic representations. Difficulties were determined in the use of verbal language when describing polyhedra and a low level of spatial thinking to transform a 3D figure. It was evidenced that there is no significant difference in the deficient conceptions given by the two groups of students. Part of the difficulties were attributed to errors and the way of presenting the subject of polyhedra in textbooks and websites and the need to design environments in which the understanding of polyhedra is not prioritised through the definition.

Keywords: spatial thinking; cognitive activity; prisms; pyramids; semiotic representations.

INTRODUCCIÓN

El pensamiento espacial ha sido objeto de investigación tanto de psicólogos como de educadores matemáticos y, como eje fundamental en el estudio de la geometría, ha estado presente desde hace muchos años en los currículos escolares, aunque no siempre de manera prioritaria. El razonamiento espacial y geométrico, principalmente sobre formas tridimensionales, también se ha relacionado con la geometría extraescolar en casi cualquier actividad cotidiana (deportiva, cultural, laboral, social, entre otras) que se realiza. Particularmente, se tiene a Wai *et al.* (2009), quienes examinaron la importancia de la capacidad espacial en las actividades educativas y en el mundo laboral, prestando especial atención a la relación existente entre tareas relacionadas con habilidades espaciales y los ámbitos CTIM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas).

El interés de poner en práctica diferentes estrategias, teorías y herramientas tecnológicas que brinden a los estudiantes la oportunidad de ejercitar y mejorar sus habilidades espaciales se muestra en las discusiones que han tenido lugar dentro de los grupos de estudio de geometría, presentes en diversos eventos internacionales, nacionales y regionales sobre investigación en educación matemática. Por ejemplo, el *International Congress on Mathematical Education*, en su versión 14 (ICME 14), y la *Conference of European Research in Mathematics Education*, en su versión 11 (CERME 11), son encuentros internacionales que se destacan por abordar discusiones relacionadas con la educación en geometría y sus prácticas, los procesos matemáticos como la argumentación, la visualización, las habilidades espaciales y la importancia de la semiótica en el desarrollo del pensamiento geométrico. El objetivo principal de estos diálogos es interrogar sobre la importancia de la investigación para comprender el papel de los diferentes procesos en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en todos los niveles (ICME14, 2021; Jankvist *et al.*, 2019).

A nivel nacional y regional se tienen, respectivamente, el Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME17, 2018) y las Olimpiadas Matemáticas Regionales, organizadas por algunas instituciones educativas como El Rosario, de la ciudad de Tunja, y la Normal Superior Sor Josefa del Castillo y Guevara, de la ciudad de Chiquinquirá. En estos escenarios el pensamiento espacial y los sistemas geométricos

también hacen su aparición y de hecho han adquirido cada vez más lugar dentro del foco de estudio. Se trata de eventos en los que predominan las actividades de manipulación de material real, las cuales, además de conducir a los estudiantes a que ejerciten su pensamiento métrico-espacial, los lleva a adquirir otro tipo de habilidades como la argumentación y el razonamiento en otros tipos de pensamiento.

Así pues, es evidente la búsqueda constante por profundizar y renovar el estudio y la investigación de enfoques que permitan enfatizar la comprensión de los sistemas geométricos y, principalmente, del pensamiento espacial. La semiótica y la visualización se han posicionado en los primeros lugares de interés para los investigadores, matemáticos y docentes en ejercicio, quienes las han vinculado a través del tiempo en sus prácticas pedagógicas dando una importancia especial a las representaciones 3D. Esto obedece al hecho de que los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y la modelación del espacio, tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento.

Esta construcción de conocimiento se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (relacionado con la capacidad práctica de actuar en el espacio manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.) a uno conceptual o abstracto (vinculado a la capacidad de utilizar diferentes registros y representaciones espaciales, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de las diferentes manipulaciones mentales (MEN, 2006).

Desarrollo del pensamiento espacial

En Colombia, los lineamientos curriculares suministrados por el MEN (1998) para apoyar la fundamentación y el estudio del área de las matemáticas en las instituciones educativas del país consideran el pensamiento espacial como el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales. Dentro de los aspectos importantes para el estudio del pensamiento

espacial se mencionan: i) la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación; ii) la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio, y iii) las transformaciones (MEN, 1998).

Registros de representación semiótica

Duval (2017) afirma que el trabajo con distintos registros semióticos y diferentes representaciones es el que asegura el éxito del aprendizaje de la matemática. En ese orden de ideas, se deben reconocer los datos o información relevantes en el contenido de la representación dada para luego transformarla, ya sea en otro registro —en cuyo caso se habla de conversión— o realizando las operaciones específicas del registro seleccionado —en lo que se denomina como tratamiento—.

La implementación de la semiótica en el estudio de la actividad matemática se relaciona con el uso de signos en matemáticas y su carácter antropológico (Radford, 2006). En este mismo sentido, desde los procesos de enseñanza y aprendizaje, “El foco primario en la perspectiva semiótica es la actividad comunicativa en matemáticas usando signos. Esto implica tanto la recepción y comprensión vía escuchar y leer, y la producción de signos vía hablar y escribir” (Ernest, 2006, p. 69).

Por otro lado, se tiene que las figuras geométricas dependen de dos registros de representación cognitivamente heterogéneos, pero de obligatoria articulación para el aprendizaje de la geometría: registro verbal y registro de visualización. Así, se pueden presentar varios enunciados que generan diferentes figuras geométricas para una misma representación visual, y a su vez se pueden dar distintas representaciones visuales para un único enunciado (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016).

Visualización para el proceso de representación de poliedros

En este trabajo se asume la visualización tal como la define Arcavi (2003), esto es,

la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas

con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión (p. 217).

Una representación semiótica no muestra las cosas como están en el entorno 3D o como se pueden proyectar físicamente en 2D, sino que refleja una organización de relaciones entre unidades representacionales. Dichas unidades pueden ser formas 1D o 2D (figuras geométricas), coordenadas (gráficos cartesianos), proposiciones (gráficos deductivos proposicionales o gráfico de prueba) o palabras (redes semánticas) (Duval, 1999).

Cuando se producen gráficamente, las representaciones semióticas están sujetas a la perceptiva visual. En ese sentido, la visualización siempre se muestra dentro de la percepción visual o dentro de su extensión mental. Algunas representaciones semióticas, como los dibujos, apuntan a ser representaciones icónicas, es decir, percepciones previas del objeto representado, desde su carácter concreto. En matemáticas, sin embargo, la visualización no funciona con representaciones tan icónicas: mirarlas no es suficiente para ver, es decir, para darse cuenta de lo que realmente está representado y comprenderlo (Duval, 1999).

Una de las operaciones de deconstrucción es aquella que se basa en la percepción para transformar las unidades de figuras en otras de la misma dimensión, por ejemplo, 2D en 2D o 3D en 3D. Otra alternativa es la deconstrucción dimensional de las formas, como nD en $(n - 1)D$. La solución de un problema de geometría en el espacio 3D, en particular, requiere necesariamente una operación de este último tipo, es decir, dejar de ver las características generales 3D de la figura de partida para pasar a ver las características de las partes 2D que las conforman. En este caso, se deben deconstruir dimensionalmente todas las formas reconocidas, antes que construir figuras instrumentalmente o con un software, y aprender a ver, sin recurrir primero a las mediciones (Duval, 2017). Por ejemplo, la figura de un cubo o una pirámide (3D/2D) se puede descomponer en una configuración de cuadrados o triángulos (en unidades figurales 2D/2D); los polígonos se descomponen a su vez en segmentos de recta (en unidades figurales 1D/2D), y las rectas o los segmentos se pueden descomponer en puntos (en unidades 0D/2D) (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016).

Tipos de actividad cognitiva y grado de pensamiento espacial en estudiantes de grado noveno

Las representaciones gráficas enriquecen y profundizan el estudio y la comprensión del pensamiento espacial. De esa manera, el uso de procesos como las representaciones semióticas y la visualización ha fortalecido la información espacial que se percibe al observar los objetos tridimensionales. Hay distintos tipos de tales representaciones, importantes todas para resaltar diferentes aspectos del espacio, al igual que para desarrollar y completar la percepción adquirida en un primer registro y para alcanzar la apropiación de los objetos matemáticos de estudio.

El pensamiento espacial se centra en el desarrollo de la perspectiva espacial, en las percepciones, en

la comprensión y el uso de las propiedades de las figuras 2D y 3D, así como en el efecto que ejercen sobre estas las diferentes transformaciones. El reconocimiento de propiedades y relaciones a partir de la observación hace que se generen conjeturas, generalizaciones, análisis y resolución de situaciones problema que propician diferentes miradas desde lo analítico y lo transformacional (MEN, 1998).

Mizzi (2017), en su libro *The Relationship between Language and Spatial Ability*, menciona el modelo integrador para habilidades espaciales que planteó Pinkernell, después de concluir que los modelos psicológicos no eran suficientes para ofrecer resultados apropiados en el campo de la educación matemática. Con base en este modelo, en la tabla 1 se plantean las categorías del pensamiento espacial que se establecieron.

Tabla 1. Categorías del pensamiento espacial.

Categorías del pensamiento espacial	Indicador
Operación visual-espacial	Acción mental (posición, forma, bosquejo, descripción o transformación) del objeto 3D en su contexto real.
Pensamiento geométrico	Reconocimiento, descripción, transformación y comprensión del objeto 3D, considerando sus características geométricas.
Visualización espacial	Interpretación y construcción de diferentes formas de representación del objeto visual 3D utilizando los términos geométricos apropiados de los elementos que lo conforman.
Pensamiento espacial	Deconstrucción, descomposición o desarrollo del objeto 3D en partes más pequeñas 3D o en 2D.

Fuente: elaboración propia basada en Mizzi (2017).

Teniendo en cuenta que en muchos casos no hay acceso directo a los objetos matemáticos, sino únicamente a sus representaciones, se dice que solo es posible trabajar en las representaciones semióticas y desde ellas, ya que son el medio de procesamiento. Las funciones cognitivas que están involucradas en el acto del pensamiento matemático (noesis) incluyen la transformación de esas representaciones semióticas obtenidas en el contexto de un problema propuesto en otras representaciones semióticas. De tal modo, puede afirmarse que no existe una verdadera comprensión en matemáticas para los estudiantes que no incorporan a su arquitectura cognitiva los diversos registros de representaciones semióticas que se

utilizan para hacer matemáticas, incluso los de visualización (Duval, 1999).

Fundamentación del problema

Al hacer una revisión detallada de los resultados correspondientes al desarrollo del pensamiento espacial en las pruebas nacionales estandarizadas de los estudiantes de grado noveno (Saber 9) del año 2017 de la institución educativa Liceo Nacional José Joaquín Casas, de la ciudad de Chiquinquirá, y analizar el informe de análisis histórico y comparativo por colegio de los resultados de dichas pruebas en el área de matemáticas, se encontró que los estudiantes respondieron más de la mitad de las preguntas de manera equivocada en 12 de los 18 aprendizajes

propios del pensamiento espacial. Estos 12 aprendizajes corresponden a los planteados en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y en la matriz de referencia de matemáticas de grado noveno que hacen parte de cada una de las diferentes competencias —razonamiento, resolución y comunicación— definidas de acuerdo a los Estándares Básicos de Competencias (EBC) en el área de matemáticas, trazados por el MEN. Los seis aprendizajes restantes tienen entre el 40 % y el 50 % de respuestas incorrectas (MEN, 2016).

Adicionalmente, el análisis de rendimiento académico llevado a cabo en varias reuniones de docentes del departamento de matemáticas de la institución educativa hizo evidente la falta de tiempo que se le dedicaba, principalmente, al desarrollo del pensamiento espacial y a los sistemas geométricos. Esto llevó a los docentes de la institución a plantear nuevas estrategias de trabajo. Una de ellas fue el paso del estudio de la geometría durante el último periodo académico del año lectivo al estudio durante el transcurso del año escolar, con una intensidad de una hora semanal. Sin embargo, comparando los resultados académicos obtenidos por los estudiantes y los resultados de las pruebas nacionales estandarizadas, antes y después de modificar la intensidad horaria de estudio, no se reflejaron cambios significativos.

De igual forma, algunos docentes de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC) expresaron que los estudiantes que ingresaban a los primeros semestres de los programas de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas contaban con limitada claridad en cuanto al trabajo con cuerpos geométricos. Asimismo, observaron que existía confusión cuando se les pedía representar gráficamente los objetos prisma triangular y pirámide triangular.

Por otro lado, se tiene que mencionar el libre acceso a la web, fuente muy popular y viable en la elaboración de trabajos y tareas cuyo uso se ha implementado recientemente entre los estudiantes de todos los niveles del Liceo Nacional. La excesiva cantidad de información disponible en la red es interpretada de diferente manera, en la que el nivel educativo del individuo desempeña un papel muy importante. Infortunadamente, en los reportes presentados por el consejo académico de la institución educativa se señala que muchos de los estudiantes de secundaria

que consultan estos medios dan credibilidad a todo lo que allí se encuentra, sin detenerse a reflexionar en lo que transcriben. Este recurso, aunque muy útil en el proceso de aprendizaje, puede generar malas interpretaciones, confusiones o introducir conceptos erróneos cuando no se tiene la orientación docente adecuada. Para el caso en análisis, se examinó el contenido relacionado a poliedros en algunos sitios web, al igual que en algunos libros de texto escolares, con el fin de determinar el lenguaje y los procesos utilizados al abordar el estudio de estos objetos tridimensionales.

A nivel local, nacional, e internacional, existen investigaciones dedicadas al desarrollo del pensamiento espacial y al estudio y fortalecimiento del aprendizaje de cuerpos geométricos. Por una parte, se destaca el trabajo de Esquivel (2018), quien aduce que la mayoría de estudiantes relacionan correctamente la representación en el plano de algunos cuerpos geométricos con su representación tridimensional, pero tienen dificultades para descomponer cuerpos 3D en figuras planas. En este mismo sentido, Toro (2017) menciona la importancia de la comprensión de las representaciones gráficas de los cuerpos a partir de la manipulación de materiales tridimensionales. Finalmente, Suárez y Ramírez (2011) enfatizan en la motivación que surge como resultado de la manipulación de materiales como plegados o troquelados y del uso de herramientas informáticas como el software Cabri 3D en la construcción, transformación e identificación de los elementos de algunos sólidos.

También existen algunas investigaciones relacionadas con representaciones semióticas, visualización y el aprendizaje basado en problemas. Entre ellas se destaca la de D' Amore y Fandiño (2012), quienes reiteran la importancia de la conciencia crítica del docente en la práctica de la aplicación de los sistemas semióticos para que los estudiantes no lleguen a confundir el objeto matemático con sus representaciones. Blanco (2009), a su vez, evidenció mayor dificultad de los alumnos al intentar describir y argumentar las características de los cuerpos y sus propiedades, al igual que la presencia de prototipos de representaciones de cuerpos tridimensionales, principalmente de cubos y pirámides, y el diseño e interpretación de representaciones planas de cuerpos geométricos tridimensionales. Baloco y López

(2022) por su parte, argumentan que el aprendizaje basado en problemas y los ambientes de aprendizaje, influyen en la mejora de la comprensión de las situaciones que se plantean, permitiendo que los estudiantes realicen un análisis mucho más detallado de la situación, apoyado, sobre todo, por el trabajo en equipo que permite que los estudiantes intercambien opiniones y lleguen a consensos.

Con las consideraciones anteriores y la aplicación de métodos empíricos como la entrevista a docentes de educación media y superior y la experiencia de las investigadoras, se pudo constatar que existen fallencias reflejadas en los estudiantes de todo ámbito escolar en el aprendizaje significativo de los objetos matemáticos que llevan al fortalecimiento del pensamiento espacial.

Según este hallazgo, el propósito principal del estudio consistió en el diseño y la aplicación de un instrumento que permitiera determinar las habilidades del pensamiento espacial de los estudiantes de grado 9-1 de la institución educativa Liceo Nacional José Joaquín Casas, de la ciudad de Chiquinquirá, al experimentar con diferentes representaciones semióticas de algunos poliedros. A partir de los resultados de esta prueba, se realizó una comparación entre este grupo y los estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas para determinar si había diferencias en las concepciones de los objetos matemáticos prisma y pirámide, lo cual condujo a finalizar con el análisis de libros de texto y páginas de internet, priorizando la forma en que presentan la temática en torno a los poliedros.

METODOLOGÍA

El presente estudio asumió un enfoque mixto con un diseño de investigación preexperimental apoyado en un análisis descriptivo y correlacional. El método mixto, según Sampieri (2018), está caracterizado principalmente por involucrar la recolección y el análisis de datos tanto cuantitativos como cualitativos, así como su integración y discusión conjunta. De tal modo es posible potenciar las fortalezas individuales de los dos métodos para enriquecer la investigación, optimizar la exploración e interpretación de los descubrimientos en el proceso investigativo, dar mayor solidez y rigor al estudio y solucionar el problema a partir del uso de diversos ambientes, fuentes, contextos y análisis en el proceso.

Esta investigación priorizó la investigación cuantitativa, asumiendo un diseño de investigación preexperimental. Esto permitió investigar los tipos de actividad cognitiva y el grado de pensamiento espacial que tenían los estudiantes de grado noveno al representar poliedros para fundamentar la necesidad de propiciar acciones educativas que conlleven al desarrollo del pensamiento matemático y, en particular, del pensamiento espacial, a través de la experimentación, la búsqueda y la exploración de prismas y pirámides y sus registros de representación semiótica.

Desde las ciencias sociales, Behar (2008) define la investigación descriptiva como aquella que se ocupa de la descripción de las características que identifican los diferentes elementos y componentes y su interrelación. Este mismo autor, en cuanto al estudio de tipo correlacional, asume que lo importante para el investigador es evaluar el grado de relación —o no— entre dos variables o fenómenos. Según ese planteamiento, el presente estudio se clasifica como descriptivo y correlacional pues primero buscó determinar las competencias que manifestaban los estudiantes de grado noveno al experimentar las diferentes representaciones semióticas de algunos poliedros y después realizó una comparación de este grupo y los estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas para determinar si había diferencias en las concepciones de los objetos matemáticos prisma y pirámide. Finalmente, se realizó un análisis de los libros de textos y sitios web más usados por los estudiantes con el fin de relacionarlos con las dificultades encontradas al abordar estos objetos tridimensionales.

En la investigación intervinieron 15 estudiantes que cursaban grado noveno en la institución educativa Liceo Nacional José Joaquín Casas del municipio de Chiquinquirá, ubicado en el departamento de Boyacá. Las edades de estos alumnos oscilaban entre los 14 y 16 años, y estos hacían parte de la población de nivel socioeconómico medio. Adicionalmente, participaron 15 estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC inscritos en la asignatura de Geometría Bidimensional.

Técnicas e instrumentos de recolección de datos

De acuerdo con los objetivos planteados, se usaron técnicas específicas en la recolección de información como: entrevistas a docentes de educación media y

superior, aplicación de dos cuestionarios y observación directa de resultados en pruebas nacionales y de los libros y sitios web más usados en el contexto colombiano.

Se diseñó y aplicó una primera prueba, titulada “Estudio de poliedros”, en la que se experimentaban diferentes representaciones semióticas de los objetos 3D. Para el caso en estudio, se utilizaron los registros semióticos verbal, gráfico y tabular. La prueba estaba conformada por cuatro preguntas abiertas y cuatro preguntas cerradas, enfocadas a determinar la actividad cognitiva y el grado de pensamiento espacial al representar poliedros. El instrumento se validó mediante el juicio de cinco expertos en educación matemática pertenecientes a dos universidades en Colombia, una universidad de Cuba y otra de Argentina, quienes consideraron para su valoración algunos elementos como el rigor en el tratamiento de los contenidos geométricos, la adecuación de las metodologías utilizadas y la objetividad y las aplicaciones esperadas del estudio realizado. Sus observaciones permitieron perfeccionarlo.

Para el análisis de las cuatro preguntas abiertas (preguntas 1, 2, 7 y 8), se estableció un conjunto de ítems basado en la prueba de Likert, en los que se pidió a los participantes elegir una de las cuatro opciones de respuesta de acuerdo a la afirmación presentada. En cuanto a las preguntas cerradas (preguntas 3, 4, 5 y 6), se valoraron como cero si el estudiante no contestaba o tenía la respuesta incorrecta y como uno si la respuesta era correcta.

Para la comparación de las concepciones de los objetos geométricos prisma y pirámide que tenían los estudiantes de grado noveno y de primer semestre de la UPTC, se diseñó y aplicó una segunda prueba. Las preguntas se valoraron de cero a cinco usando la misma escala Likert de la primera prueba. Se utilizaron los métodos teóricos (análisis-síntesis) y empíricos para determinar si existía diferencia significativa a nivel conceptual entre los dos grupos de estudiantes, y los métodos matemáticos estadísticos aplicados para el procesamiento de la información fueron los softwares Producto de Estadística y Solución de Servicio (SPSS por sus siglas en inglés) y Excel.

Por otra parte, se utilizó la observación directa de los libros de texto y páginas de internet de uso frecuente en el contexto de los estudiantes para revisar la

forma como se presenta la temática de poliedros. En este caso se tomaron fotografías de apartados que contenían errores, particularmente en las representaciones verbales y gráficas de los objetos prismas y pirámides.

Es de destacar que, una vez realizados el análisis de los resultados de las pruebas y la revisión de la literatura, se precisó de la triangulación empírica para buscar las regularidades existentes entre los significados y representaciones semióticas ofrecidas en los libros o páginas web y las que evidenciaban los estudiantes. De esta forma fue posible establecer las conclusiones generales.

Para el procesamiento de la información recolectada se tuvo en cuenta la teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval (1999, 2006, 2017; Duval y Sáenz-Ludlow, 2016); principalmente, los registros verbales, los registros de visualización y la deconstrucción dimensional de los poliedros. El trabajo describe las actividades cognitivas alcanzadas por los estudiantes teniendo en cuenta lo que Duval (1999) manifestó acerca de los registros de representación semiótica:

- La presencia de una representación identificable. Para el caso en estudio, se trata de los poliedros.
- El tratamiento de una representación. Cambia la representación, pero no el tipo de registro.
- La conversión de una representación. Cambia el tipo de registro y, por tanto, la representación.

De acuerdo al propósito principal de la investigación y la clasificación realizada con anterioridad, se especificaron las representaciones semióticas correspondientes a cada tipo de registro establecido para los objetos 3D, y las categorías de pensamiento espacial descritas de acuerdo a los desempeños que los estudiantes alcanzaron en las preguntas formuladas (ver tablas 1 y 3).

RESULTADOS

Para el caso en estudio, se utilizaron los registros semióticos verbal, gráfico y tabular, representados con R_1 , R_2 y R_3 respectivamente, y cada uno conformado a la vez con al menos una representación semiótica (tabla 2).

Tabla 2. Registros semióticos para los objetos poliedros.

Objeto geométrico	Registro semiótico	Símbolo	Representación semiótica
Poliedros	Verbal	R_1	$R_1 r_1 - R_1 r_2 - R_1 r_3 \dots$
	Gráfico	R_2	$R_2 r_1 - R_2 r_2 - R_2 r_3 \dots$
	Tabular	R_3	$R_3 r_1 - R_3 r_2 - R_3 r_3 \dots$

Fuente: elaboración propia.

Como se observa en la tabla 3, en el presente estudio se formularon los descriptores de los tratamientos o conversiones, enfocados a determinar la actividad cognitiva y el grado de pensamiento espacial al representar poliedros.

Tabla 3. Actividad cognitiva y pensamiento espacial en la prueba.

Representación semiótica	Descripción	Categorías del pensamiento espacial
Pregunta 1. Conversión. Registro gráfico a verbal (R_2 a R_1)	Describe objetos 3D que se presentan en su contexto real, dada su representación gráfica.	Operación visual-espacial
Pregunta 2. Conversión. Registro verbal a gráfico (R_1 a R_2)	Dada la descripción del objeto 3D, el estudiante lo representa gráficamente teniendo en cuenta las características descritas.	Visualización espacial
Preguntas 3 a 6. Tratamiento. Registro gráfico (R_2)	Transforma el objeto 3D mediante una disección, una rotación o una representación 2D.	Pensamiento espacial
Pregunta 7. Conversión. Registro gráfico a tabular (R_2 a R_3)	Dada la representación gráfica del objeto 3D considerando sus características geométricas, el estudiante elabora la tabla con los elementos que lo caracterizan (aristas, vértices, diagonales, caras).	Pensamiento geométrico Visualización espacial
Pregunta 8. Identificación. Registro verbal (R_1)	Descripción del objeto 3D relacionándolo con otro objeto 3D.	Visualización espacial

Fuente: elaboración propia.

El registro verbal en la descripción de los objetos 3D presentó, principalmente, dos situaciones. En la primera los estudiantes se limitaron a nombrar algunos elementos correspondientes a cada objeto (caras, aristas y vértices), lo que dejó en evidencia la dificultad y la falta de claridad en el uso del lenguaje verbal para dar la definición de estas figuras y para la identificación de sus elementos. El número de caras,

vértices y aristas relacionados a cada objeto en este caso no era correcto.

En la segunda situación están los estudiantes que intentaron describir los objetos, aunque sus respuestas dejan ver la confusión que hay al diferenciar un prisma de una pirámide. Como se observa en las transcripciones de algunas respuestas tomadas,

asignan el nombre de “pirámide” a los dos objetos cuyas formas correspondían a un prisma y a una pirámide. Algunos participantes prefirieron extenderse en los elementos secundarios como los colores de

la descomposición de la luz y no en el objeto geométrico como tal. Solamente el 13 % de los alumnos hizo una descripción acertada de los objetos ilustrados (figura 1a).

Figura 1. Resultados de las preguntas abiertas.

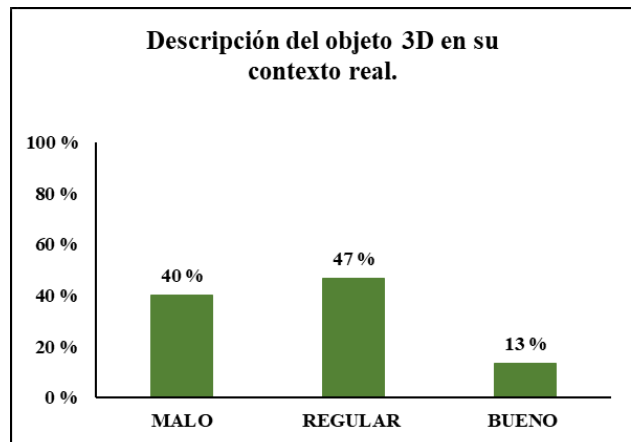


Figura 1a

Fuente: elaboración propia.

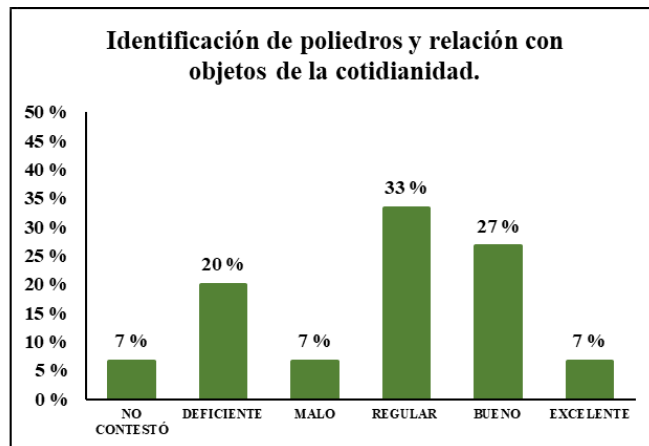


Figura 1b

De igual forma se descubrió deficiencia en la identificación y relación de poliedros con un objeto de la cotidianidad que tenga la misma forma. En este caso se obtuvieron respuestas en las que un poliedro es relacionado con una figura plana o viceversa (figura 1b).

Sobre el estudio de poliedros

El paso del registro verbal al gráfico de una pirámide cuadrada considerando las características geométricas dadas reflejó la representación mejor trabajada por los estudiantes. En esta actividad se evidenció

el 60 % de respuestas acertadas, mientras que los registros verbales en la descripción de objetos 3D y su relación con objetos de su entorno arrojaron tan solo un 13 % y un 27 % de respuestas correctas, respectivamente. De manera similar, en la transformación de una figura 3D mediante una rotación se evidenció el 20 % de acierto en la respuesta. Además, aunque las transformaciones de objetos 3D mediante una disección o una representación 2D tienen proporciones de aciertos del 40 % y el 47 %, estos siguen siendo menos de la mitad de los participantes (figura 2).

Figura 2. Resultados de la prueba sobre el estudio de poliedros.



Fuente: elaboración propia.

A continuación, se presentan algunos resultados de las preguntas abiertas, asociadas a la representación tabular y verbal de los poliedros.

En el registro tabular de los elementos de los poliedros representados en la figura 3, se obtuvieron cuatro casos de respuesta diferentes. En un primer lugar se encuentran los estudiantes que elaboraron

una tabla separando columnas, con el número de caras, vértices y aristas. Un segundo caso lo conforman los participantes que elaboraron una tabla con una columna en la que escribieron las características de los poliedros. En el tercer caso están aquellos que elaboraron una tabla con los dibujos de los poliedros dados y, por último, hubo quienes no presentaron ningún tipo de tabulación.

Figura 3. Poliedros cuyos elementos fueron tabulados por los estudiantes.

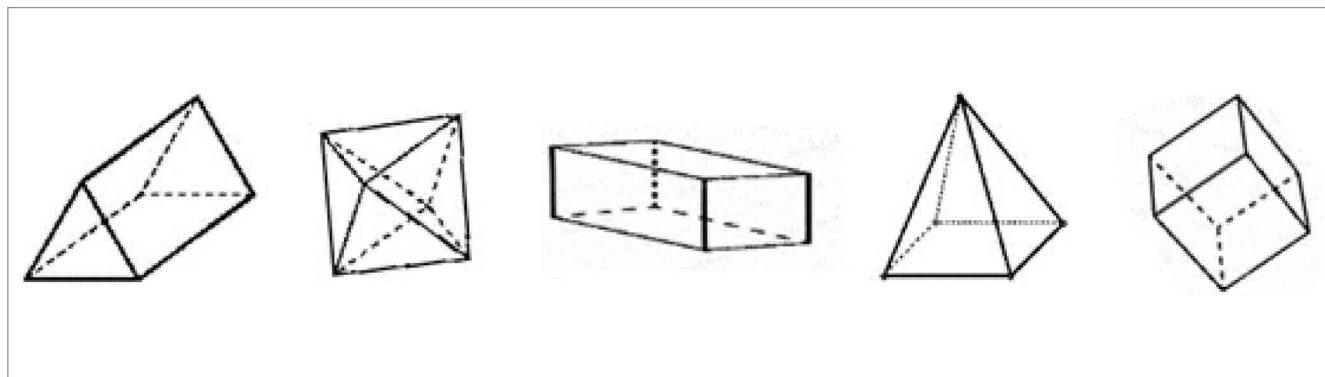


Figura 3a

Figura 3b

Figura 3c

Figura 3d

Figura 3e

Fuente: elaboración propia.

En el registro verbal, cuando se solicitó a los estudiantes relacionar los poliedros de la figura 3 con objetos de su cotidianidad y el nombre con el que los identificaban, se obtuvieron algunas respuestas como las siguientes:

- Lo identificaron como un triángulo, un triangular y un prisma, y lo relacionaron con una carta, una escuadra, una regla, una caja de chocolate y un *camping*.
- Lo identificaron como un rombo, una pirámide, un prisma como rombo y un octaedro, y lo relacionaron con un cono, un trompo y un diamante.
- Lo identificaron con un rectángulo, un prisma rectangular y un ortoedro, y lo relacionaron con un cuadrado, una caja, una pecera, un borrador y un ladrillo.
- Lo identificaron como un triángulo, una pirámide, un tetraedro y una pirámide triangular, y lo relacionaron con un rallador, una caja de almendras, un triángulo y la punta de la torre Eiffel.

- La mayoría recordó el nombre del cubo; solo un estudiante lo identificó como un cuadrado. Lo relacionaron con una caja, un cubo Rubik, un dado, un cajón y una lavadora.

En estas respuestas se evidencia claridad en la identificación, definición y relación del cubo con objetos de la cotidianidad. Sin embargo, al preguntar por el cubo resultante luego de sufrir una rotación, el 80 % de los estudiantes no obtuvieron una respuesta acertada. Expresaron dificultad para imaginarse la nueva disposición en que quedarían las caras diferenciadas del cubo al rotarlo mentalmente.

Concepción de los objetos prisma y pirámide

El análisis en este aspecto partió del segundo instrumento diseñado, de acuerdo con las respuestas dadas por los dos grupos de estudiantes a las preguntas “¿Qué es un prisma?” y “¿Qué es una pirámide?”. La tabla 4 muestra algunas de las principales definiciones con las que se realizó la comparación.

Tabla 4. Transcripciones de las definiciones enunciadas por los estudiantes.

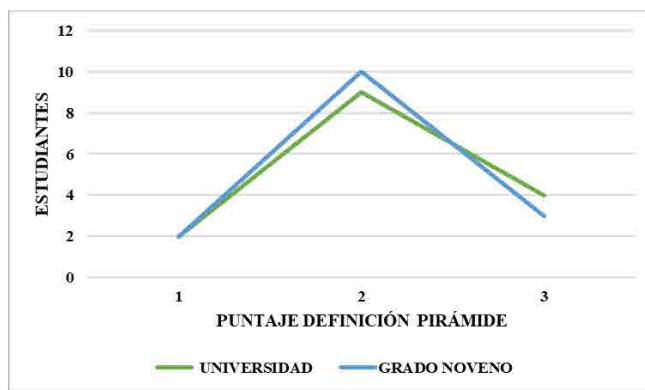
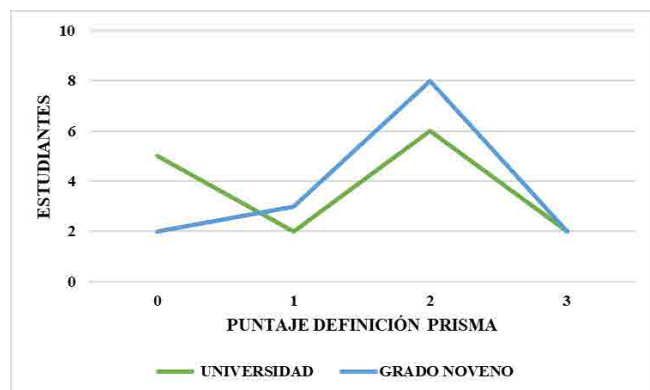
Transcripciones de definición de prisma	Transcripciones de definición de pirámide
<p>Estudiantes de grado noveno: “Es una complementación geométrica que tiene 2 pirámides y 2 cuadrados que se unen en la parte superior, teniendo de base un cuadro”; “Es una pirámide que va en la mitad atravesada con un arcoíris y al salir ya se ve otro color”; “Tiene 4 lados, tiene 6 vértices, 2 lados son iguales”; “Este cuerpo geométrico cuenta con caras, es una figura triangular que también posee un vértice y unas aristas”.</p>	<p>Estudiantes de grado noveno: “Es una pirámide que forma como varios cuadros”; “Tiene 4 lados iguales, tiene 5 vértices”; “Tiene 5 vértices, tiene 5 caras y tiene 16 aristas”; “Este cuerpo geométrico contiene una variedad de caras, aristas y vértices”.</p>
<p>Estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas: “Es de forma de pirámide pareciendo”; “Es una figura geométrica, la cual puede tener sus lados congruentes o no, puede ser triángulo rectángulo isósceles etc.”; “Es un lugar geométrico que está definido por el recorrido de un punto a tres puntos fijos formando cuatro planos”; “Figura geométrica con cuatro o más lados y ángulos de diferente medida”; “Figura geométrica con forma de diamante”; “Es un material, objeto, cosa donde se puede plasmar una figura geométrica”; “Es un sólido el cual tiene tres caras triangulares, las cuales se unen en un vértice y tiene una base cuadrada”; “Sólido de cinco caras en forma de pirámide”; “Es una superficie que contiene seis caras y es como una pirámide”; “Es de la familia de las pirámides (2D) y en 3D tiene más caras”; “Es una figura geométrica con varias caras planas”.</p>	<p>Estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas: “Figura compuesta de figuras geométricas, que se parece a un triángulo, pero es una figura sólida”; “Es un triángulo en tres dimensiones”; “Es una figura geométrica que consta de cuatro lados triangulares y una base cuadrada”; “Es una figura que hace parte de la familia del triángulo”; “Es una figura en forma de triángulo tridimensional. Tiene cuatro caras y una base”; “Figura sólida de cuatro caras”; “Sólido geométrico que tiene una base cuadrada, y sus lados son triángulos”; “Son como triángulos unidos, y por cualquier lado que la observemos siempre representará un triángulo”; “Es una figura geométrica de cinco lados. Cuatro de ellos son triángulos iguales y un cuadrado”; “Es una figura geométrica que tiene forma triangular”.</p>

Fuente: elaboración propia.

Al observar las “estadísticas de muestras emparejadas” y la “prueba de muestras emparejadas” obtenidas con el software de procesamiento estadístico SPSS, se obtuvo un nivel de significancia para la definición de prisma de $p=0,454 > 0,05$, y para la definición de pirá-

mide de $p=0,719 > 0,05$. Estos resultados indican que no existen diferencias significativas entre las concepciones que tienen los estudiantes de grado noveno y las de los alumnos de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas frente a los objetos prisma y pirámide.

Figura 4. Comparación entre resultados de estudiantes de grado noveno y de los universitarios.



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la tabla 4 y la figura 4, se pudo constatar que los estudiantes utilizan lenguaje matemático para la elaboración de las definiciones. Más del 50 % de los participantes brindaron definiciones equivocadas, deficientes o que no contestaron, y además no hubo respuestas óptimas.

Asimismo, se pudo apreciar que la concepción de los participantes respecto a la definición de prisma es la de igualdad con la pirámide. Al indagar a los estudiantes sobre sus respuestas, manifestaron seguridad en lo correcto de sus respuestas y que el prisma siempre lo escucharon nombrar en las clases de física, en experimentos con la luz. De tal modo, al ser este prisma en particular uno triangular, fácilmente se crea la noción de su equivalencia con la pirámide.

En cuanto a la concepción de pirámide, se resalta que es un objeto matemático que los estudiantes siempre asocian a las pirámides de Egipto, por lo que una buena parte de ellos la definen como aquella que contiene triángulos y una base cuadrada. Se presume que, cuando estuvieron en edades escolares tempranas como el preescolar, su primer encuentro se hizo con esta única forma. Al indagar al respecto, varios participantes coinciden en que la manipularon y construyeron con plastilina, lo que hace que exista una mayor fijación del objeto matemático, aunque haya sido solo una particularidad de este. Se observan también dificultades en la identificación de elementos al reemplazar la palabra “caras” de una pirámide por “lados”.

Temática de poliedros en páginas web y libros de texto

Después de la revisión de algunas páginas de internet y libros de texto de uso frecuente por docentes y estudiantes de la muestra escogida para este estudio en cuanto a objetos tridimensionales, específicamente poliedros, se encontraron algunos aspectos que pueden ser considerados como posibles causas de la confusión que presentan los participantes para diferenciar por ejemplo los prismas triangulares de las pirámides cuadrangulares. Se evidencia así la necesidad de introducir estos conceptos no solo desde las diferentes representaciones semióticas, sino desde una mirada histórica y de la resolución de problemas del contexto.

Una primera acotación está relacionada con algunos sitios web en los que, al tratar la descomposición de

la luz, hacen alusión a un prisma de cristal. La imagen que se utiliza como representación de este corresponde a la vista de una de sus bases triangulares, lo cual no se aclara. Esto puede llevar a que los jóvenes que están empezando el estudio de estos objetos 3D relacionen el prisma con un triángulo, como lo reflejan algunos resultados de la prueba aplicada, donde relacionaron objetos 3D con figuras planas.

Algunos de los sitios web en mención son:

- [https://es.wikipedia.org/wiki/Prisma_\(%C3%B3ptica\)#Tipos](https://es.wikipedia.org/wiki/Prisma_(%C3%B3ptica)#Tipos)
- <http://www.educa.madrid.org/web/ies.alonsoquijano.alcala/carpeta5/carpetas/quienes/departamentos/ccnn/CCNN-1-2-ESO/2e-so/2ESO-12-13/Bloque-III/T-4-Luz-Sonido/T-4-Luz.html#82>
- <https://www.youtube.com/watch?v=zQcbLw-GT8w0&t=60s>
- http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/color/Luz_descomposicion.htm

Un segundo caso corresponde a algunos sitios web en los que, de manera similar a los anteriores, mencionan el prisma de cristal o prisma óptico, pero en esta ocasión la imagen que se utiliza como representación de dicho elemento corresponde a una pirámide rectangular o cuadrangular. Adicionalmente, se encontró una página educativa, *Khan Academy*, en la que se proyecta un video donde muestran una pirámide rectangular diciendo que es un prisma rectangular. A su vez, páginas comerciales presentan situaciones similares. Un ejemplo de ello es el nombre asignado a obras de arte como el caso de la obra conformada por cinco pirámides cuadrangulares, la cual se titula *Familia Bibelots Prismas Triangulares*. Un estudiante de secundaria con conceptos vagos acerca de los poliedros fácilmente adopta un error por esta vía.

A continuación, se relacionan algunos de los sitios web e imágenes a los que se hace alusión en esta oportunidad:

- <https://es.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-solids/hs-geo-2d-vs-3d/v/vertical-slice-of-rectangular-pyramid?v=4vtF-Dkk9xkw>

- <https://www.youtube.com/watch?v=4vtF-Dkk9xkw>
- <https://es.wikihow.com/hacer-un-arco%C3%ADris>
- https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_2eso_Luz_Sonido-JS/2q4_contenidos_3e1.htm
- <https://sites.google.com/site/sicalasanzciencias2/la-luz-y-el-sonido/la-descomposicion-de-la-luz>
- https://dragoncity.fandom.com/es/wiki/Prisma_de_Luz

Para el caso de libros de texto, la figura 5 muestra cómo, por ejemplo, la representación geométrica de algunos poliedros no corresponde con el nombre dado. Tal es el caso de la pirámide cuadrangular y de la pirámide triangular. Por otro lado, en la mayoría de libros analizados se encuentran tablas de clasificación de poliedros en las que se separan cubo, ortoedro y prisma sin mencionar las relaciones existentes entre estos objetos. También se notan errores al presentar las fórmulas para el cálculo de volumen. Una evidencia de ello se tiene en Díaz *et al.* (2004).

Figura 5. Ejemplos de presentación poliedros en libros de texto.



Fuente: Grupo Pedagógico (2020, p. 25).

En la figura 6 se presenta una actividad curiosa propuesta en un libro de texto. Según la figura 6a, una respuesta sugerida a la hora de relacionar una figura tridimensional con un triángulo es una pirámide, cuando claramente podría pensarse también en un prisma triangular. A su vez, para el cuadrado se propone como figura tridimensional asociada un prisma (el cubo), aunque sería acertado también tener una pirámide cuadrangular.

Por otra parte, en la figura 6b se pide dibujar un objeto tridimensional con los cuatro triángulos dados y se sugiere como respuesta una pirámide. Sin embargo, en tal caso faltaría una cara cuadrada y, si se pensara en una pirámide triangular, tampoco sería posible su construcción con los cuatro triángulos dados pues, aunque son congruentes, no son equiláteros.

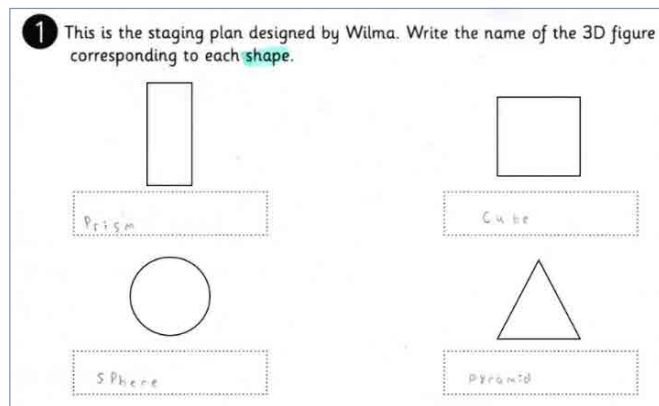
Figura 6. Ejemplo de actividades propuestas en libro de texto.

Figura 6a

Fuente: Sancho (2018, p. 28).

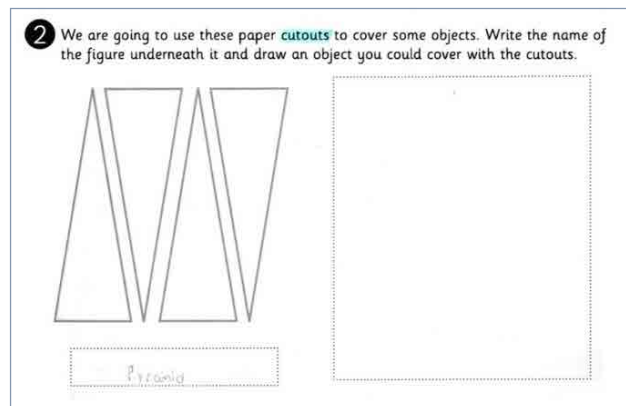


Figura 6b

Finalmente, en una *Android Application Package* (APK) sugerida como profundización del contenido referente a poliedros, se encontró una actividad en inglés que indicaba: “*Pick the figures that are: it has only one base and two of its faces are parallel and are parallelograms*”. En este caso, las características proporcionadas son excluyentes y, sin embargo, se muestra como respuesta correcta una pirámide de base cuadrada.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El tiempo dedicado al estudio de la geometría en la institución educativa Liceo Nacional José Joaquín Casa es limitado. Este concentra el trabajo del pensamiento espacial únicamente en la transformación de figuras planas y en el reconocimiento de cuerpos 3D específicos como el cubo y algunos cuerpos redondos en los grados sexto, séptimo y octavo de educación secundaria. Por su parte, el estudio específico de las propiedades de poliedros se remite a determinar el cálculo de medidas de superficies y volúmenes en el grado noveno.

Las pruebas aplicadas a los estudiantes constatan lo observado inicialmente en los resultados de las pruebas nacionales estandarizadas Saber 9 pues, al determinar cualitativa y cuantitativamente los tipos de actividad cognitiva (identificación, tratamiento o conversión) y el grado de pensamiento espacial que tienen los estudiantes de grado noveno de la institución educativa al representar poliedros, se tiene un 62 % de preguntas no acertadas. La menor dificultad en este sentido se refiere a representar gráfica-

mente el objeto 3D considerando las características geométricas dadas, mientras que la mayor dificultad se da al describir objetos 3D que se presentan en su contexto real. Además, al identificar las dificultades y necesidades de los estudiantes, se aprecia oportunamente el papel del docente, formado y comprometido con la educación matemática, en el diseño e implementación de estrategias y actividades que favorezcan el desarrollo del pensamiento espacial a través del estudio de prismas y pirámides y sus registros de representación semiótica.

En el desarrollo del registro de representación verbal, la descripción de objetos 3D presentados en su contexto real y la relación establecida con otros objetos 3D se consideran indicadores esenciales para afianzar la competencia comunicativa y argumentativa. De manera análoga, la descomposición de objetos 3D en partes más pequeñas 3D o en 2D y la visualización son primordiales para el desarrollo del pensamiento espacial. En concordancia con Duval (1999), se cree necesaria la incorporación de diversos registros de representación semiótica para que exista una verdadera comprensión de los objetos matemáticos en estudio.

Las representaciones de prismas y pirámides utilizadas en diferentes páginas web y el lenguaje verbal que las acompañan pueden generar obstáculos didácticos y epistemológicos en el aprendizaje. Muestra de ello es la noción de los objetos geométricos en mención que presentaron los estudiantes tanto de grado noveno como los de primer semestre de educación superior, sin diferencia significativa en sus

respuestas. Adicionalmente, la brecha de estudio de cuerpos poliédricos entre grado noveno y primer semestre de educación superior pudo influir en esto.

A partir del análisis de las respuestas de estudiantes universitarios y de grado noveno, contrastadas estadísticamente sin diferencia significativa, se vio la necesidad de realizar una búsqueda en algunos libros de texto de uso común en el contexto colombiano y se relacionaron algunos errores encontrados en la forma de presentación del concepto de poliedros. Son fallas muy marcadas y en correspondencia con los hallazgos de las pruebas aplicadas, donde los estudiantes confunden principalmente la pirámide y el prisma triangular. Además, se tomaron para el análisis algunas páginas web que los estudiantes habían estado usando como referente de consulta en medio de la situación de pandemia; la mayoría encontradas por ellos mismos con el ánimo de complementar las temáticas del grado noveno.

Asimismo, las compras por internet se han elevado de acuerdo a lo esperado, así que se enfatiza en reconocidas páginas comerciales de compraventa de artículos en las que los nombres de diferentes artículos u obras son la combinación de las palabras “prisma” y “pirámide” sin distinción alguna. Se puede ver en los siguientes ejemplos cómo se cambian estas dos palabras para hacer referencia al mismo objeto, lo cual se relaciona directamente con lo hallado en este estudio para los dos grupos de estudiantes:

- El sitio web https://www.todocoleccion.net/coleccionismo-minerales/gran-piramide-de-cristal-prisma-transparente-descomposicion-luz~x30009446#sobre_el_lote presenta en la sección de minerales una imagen titulada “Gran pirámide de cristal, prisma transparente. Descomposición de la luz”, y en la descripción que se da de la piedra se encuentra: “gran pirámide transparente de cristal. Este prisma de cristal es utilizado y es perfecto para experimentar la descomposición de la luz en colores”.
- El sitio web <https://www.mantacala.com/prismas-piramides-ofertas/> ofrece información de una gran variedad de artículos, joyas y accesorios, entre otros, cuyas descripciones resultarían muy confusas en el ámbito educativo. Un artículo con opción de compra es “Prisma de pirámide prisma de división de

haz, experimento óptico para la enseñanza de la física del espectro de luz con caja de regalo ligera”, que cuenta dentro de las especificaciones con la característica “Portátil: este es un cubo miniprisma de vidrio óptico”. En este caso, si bien pareciera que la expresión “cubo miniprisma” hiciera referencia a la caja que contiene la pirámide, la especificación que le sigue, “vidrio óptico”, confirma que se refiere a la pirámide cuadrangular.

En este último enlace también se destaca la promoción de un artículo con el título “Prisma de pirámide de 40 lados de vidrio óptico para experimento”. Adicionalmente, se describen varios aspectos del producto, entre los que para el presente estudio se destaca: “La pirámide de cristal puede crear un arcoíris a la luz del sol, funciona como prisma y buenos efectos ópticos”. Así pues, se toman como sinónimos en un poliedro las palabras “cara” y “lado”, un error que también se presentó en las definiciones que aportaron los estudiantes de nivel universitario.

Gran parte de los libros y sitios web usados por los docentes y estudiantes interesados en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática se limitan a dar la definición del objeto matemático con su respectiva representación gráfica, sin dar espacio a la solución de problemas del contexto que involucren estos sólidos. No se induce a que el estudiante realice su propia descripción oral o escrita de lo que observa a fin de comprender estos objetos matemáticos. Solo en un libro se parte de la importancia histórica que tuvieron en las civilizaciones poliedros como las pirámides.

Por todo lo anterior, se fundamenta la necesidad de propiciar acciones educativas en procura del desarrollo del pensamiento espacial a través de la experimentación, búsqueda y exploración de prismas y pirámides y sus registros de representación semiótica. De igual forma, es preciso atender a la orientación que debe dar el docente mediando entre la revisión detallada de libros y páginas de internet, principalmente cuando se les sugiere a los alumnos un estudio individual de la temática de poliedros.

CONCLUSIONES

Se descubrieron dificultad, falta de claridad y deficiencia en el uso del lenguaje verbal para dar la definición de las figuras 3D, identificar sus elementos

(caras, aristas y vértices), caracterizar y relacionar poliedros con un objeto de la cotidianidad que tuviera la misma forma. De tal forma, se obtuvieron respuestas en las que un poliedro es relacionado con una figura plana o viceversa. Las transformaciones mediante disección o representación 2D, por otra parte, pertenecen a los porcentajes más altos obtenidos por los estudiantes; sin embargo, estos siguen correspondiendo a menos de la mitad de los participantes.

En las respuestas también se encontró familiaridad de los estudiantes con los objetos geométricos cubo y pirámide cuadrangular, los cuales fueron identificados, definidos y relacionados con objetos de la cotidianidad. No obstante, al exponer a los participantes a algún tipo de conversión o tratamiento, no proporcionaron respuestas acertadas y además expresaron dificultad para imaginarse la nueva figura 3D.

Las habilidades espaciales expuestas por los estudiantes al utilizar algunos registros de representaciones semióticas de poliedros (lenguaje natural, tabular y gráfico) indicaron un desempeño básico en los distintos indicadores planteados en las categorías de pensamiento espacial. Asimismo, se evidenció que no hay diferencia significativa en las concepciones deficientes de los objetos prisma y pirámide dadas por los grupos de estudiantes de grado noveno y alumnos del primer semestre de Licenciatura en Matemáticas. También se detectaron dificultades en la identificación de sus elementos y para reemplazar la palabra “cara” de una pirámide por “lados”.

En suma, los conceptos matemáticos de los objetos prisma y pirámide no deben ser comprendidos a través de la imposición de sus definiciones, sino que se deben propiciar ambientes en los que se experimenten sus transformaciones geométricas a través de material concreto y secuencias didácticas pensadas desde la resolución de problemas.

DECLARACIÓN DE CONFLICTOS DE INTERESES

La elaboración, la redacción y la ejecución del presente estudio se llevaron a cabo sin la influencia de intereses personales o ajenos a la voluntad de las autoras, incluyendo malas conductas o valores distintos a los que usual y éticamente tiene la investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.
- Baloco, C., & López, O. (2022). Ambientes virtuales con metodología de aprendizaje basado en problemas (ABP): Una estrategia didáctica para el fortalecimiento de competencias matemáticas de las herramientas multimedia interactivas para la enseñanza. *Praxis*, 18(2), 324-334.
- Behar, D. S. (2008). *Metodología de la investigación*. Shalom.
- Blanco, H. (2009). *Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones* [Tesis de maestría en Ciencias en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional, México].
- Buenaventura, J. (2015). *Representaciones semióticas de sólidos que tienen los estudiantes de educación media* [Trabajo de grado, Universidad del Tolima].
- D'Amore, B. y Fandiño, M. (2012). Análisis de situaciones de aula en el contexto de la práctica de investigación: un punto de vista semiótico. *Educación Matemática*, 24(3), 89-117.
- Díaz, R., Robayo, M., Díaz, F., Centeno, G., Torres, M. y Quijano, M. (2004). *Nuevo Pensamiento Matemático 7*. Libros y Libros.
- Duval, R. (1999). *Representation. Vision and visualization: Cognitive functions in Mathematical Thinking*. Basic Issues for Learning.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematic. En R. Duval, *Educational Studies in Mathematics* (pp. 103-131). EBSCOhost.
- Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking-The Registers of Semiotic Representations*. Springer Nature.
- Duval, R. y Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- ECME17. (2018). *Programación General ECME-17. Lineamientos curriculares y estándares de matemáticas: Investigación e innovación en el aula*. <http://www.asocolme.org/images/eventos/17/programacion-ecme17.pdf>.
- Ernest, P. (2006). A Semiotic Perspective of Mathematical Activity: The Case of Number. *Educational Study in Mathematics*, 61(1/2), 67-101.
- Esquivel, A. (2018). *Propuesta didáctica para fortalecer la habilidad de abstracción en el aprendizaje de sólidos geométricos con estudiantes de grado noveno* [Tesis de maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/69583>
- Grupo Pedagógico. (2020). *Taller Dinámico 3 Tercero*. Dinámico Pedagogía y Diseño.
- ICME14. (2021). *Topic Study Groups*. Proceedings of the fourteenth International Congress on Mathematical Education (ICME14, July 11 – 18, 2021). Shanghai. <https://www.icme14.org/static/en/news/37.html?v=1570521982227>
- Jankvist, U. T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (Eds.). (2019). Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11, February 6 – 10, 2019). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.science/CERME11>
- MEN (1998). *Lineamientos curriculares en Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Colombia. https://www.mineduccion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Colombia. https://www.mineduccion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- MEN. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Ministerio de Educación Nacional. Colombia. https://www.colombiaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/2022-06/DBA_Matematicas-min.pdf
- Mizzi, A. (2017). *The Relationship between Language and Spatial Ability*. Springer Spektrum.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. *PME-NA 2006 Proceedings*, 1-2, 2-21.
- Sampieri, R. H. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw-Hill.
- Sancho, M. (2018). *Maths Activity Book Primary 4*. Stanley Publishing.
- Suárez, P. y Ramírez, G. (2011). Exploración de sólidos a partir de sistemas de representación. *Praxis & Saber*, 2(3), 27-60. https://revistas.uptc.edu.co/revistas/index.php/praxis_saber/article/view/1109
- Toro, D. A. (2017). *Redescubrimiento de la geometría mediante el desarrollo del pensamiento espacial y la interpretación del mundo físico en los estudiantes del grado sexto de la I.E. Santa Rita Sede Santa Ana* [Trabajo de grado para optar al título de magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia]. Repositorio Institucional. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/59208>
- Wai, J., Lubinski, D. y Benbow, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology*, 101(4), 817-835. <https://doi.org/10.1037/a0016127>